

MODÈLE ÉLASTO-VISCO-PLASTIQUE ENDOMMAGEABLE COUPLÉ AVEC LES DÉRIVÉES FRACTIONNAIRES POUR MATÉRIAUX COMPOSITES

A. Krasnobrizha, P. Rozycki, P. Cosson, L. Gornet *Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) - UMR CNRS, Ecole Centrale de Nantes, 6183, 1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3. Téléphone : 02 40 37 68 21, Adresses électroniques : alina.krasnobrizha@ec-nantes.fr, patrick.rozycki@ec-nantes.fr, pascal.cosson@ec-nantes.fr, laurent.gornet@ec-nantes.fr*

Mots clés : composite, simulation, hystérésis, dérivée fractionnaire

1. INTRODUCTION

L'utilisation intensive des matériaux composites dans les applications industrielles requiert une meilleure compréhension de leur comportement mécanique. Depuis plusieurs décennies, de nombreux modèles ont été développés et permettent de prendre en compte les déformations élastiques et anélastiques, les endommagements (P. Ladeveze *et al.*, 2000, A.F Johnson *et al.*, 2001, C. Hochard et Y. Thollon, 2010) et la sensibilité à la vitesse de déformation (P. Rozycki, 2000, S. Marguet *et al.*, 2007). Dans des travaux plus récents, une approche à base de dérivées fractionnaires a permis d'écrire les phénomènes dépendant de l'histoire du matériau, comme les boucles d'hystérésis (M. Mateos *et al.*, 2012, M. Mateos *et al.*, 2014). Par contre, à notre connaissance, il n'existe pas de modèle permettant de prendre en compte l'ensemble des phénomènes précédemment cités, ce qui constitue une réelle limite dans certaines problématiques complexes nécessitant une description précise des différents mécanismes de dissipation. Par exemple, dans le cas d'essais de fatigue, les effets thermomécaniques ne peuvent pas être négligés et une description précise des phénomènes d'hystérésis doit être introduite dans les modèles de comportement.

Notre travail se positionne dans le contexte de la fatigue des tissus composites stratifiés à matrice thermodurcissable ou thermoplastique. A la différence des méthodes conventionnelles (courbes S-N), nous avons développé une méthode basée sur des essais d'auto-échauffement qui permet d'identifier rapidement la limite d'endurance du stratifié (L. Gornet *et al.*, 2013). Cette méthode requiert l'analyse et la compréhension de tous les phénomènes thermomécaniques qui apparaissent dans le matériau au cours de l'essai. Pour augmenter l'efficacité de cette méthode expérimentale, nous avons cherché à coupler un modèle de comportement élasto-plastique endommageable avec un modèle exprimé à l'aide de dérivées fractionnaires. Les dérivées fractionnaires permettent de représenter fidèlement les boucles d'hystérésis. Avec cet ajout, il devient possible de simuler l'ensemble des dissipations lors d'un essai de fatigue.

2. MODELE ÉLASTOPLASTIQUE ENDOMMAGEABLE FRACTIONNAIRE

Dans cet article, nous proposons donc un nouveau modèle de comportement du pli élémentaire orthotrope, qui se décompose en deux sous-modèles. Le premier sous-modèle est consacré à caractériser le comportement élasto-plastique endommageable du composite lors de la phase de chargement monotone. Les déformations élastiques et anélastiques ainsi que l'endommagement dans le pli sont calculés. La sensibilité du pli élémentaire à la vitesse de déformation peut également être prise en compte. La deuxième partie du modèle utilise une approche par dérivées fractionnaires pour décrire le comportement en cisaillement plan lors de la phase de décharge et de recharge pendant

laquelle la boucle d'hystérésis apparaît. Les paramètres de cette loi de comportement sont facilement identifiés à partir des données expérimentales grâce à un algorithme d'optimisation développé avec Matlab. Dans le cas des composites tissés stratifiés, le pli élémentaire est modélisé par un état de contraintes planes. Dans ce qui suit, les indices 1 et 2 représentent les directions d'orthotropie dans le plan du pli élémentaire de tissu supposé homogénéisé.

2.1 Sous-modèle 1 : Modèle Élastoplastique Endommageable à Ecrouissage Isotrope

Le modèle proposé est capable de représenter le comportement du matériau composite pour des chargements quasi-statiques ou en fatigue. Le domaine élastique est défini avec la fonction f par :

$$f = \sqrt{\tilde{\sigma}_{12}^2} - R(p) - R_0 \quad (1)$$

où $\tilde{\sigma}_{12} = \frac{\sqrt{2}\sigma_{12}}{(1-d_{12})}$ représente la contrainte effective, d_{12} représente la variable d'endommagement

(qui reste constante dans toute l'épaisseur de couche ($0 \leq d_{12} \leq 1$)), $R(p)$ est la fonction d'écrouissage où p représente la déformation plastique cumulée, R_0 est le seuil initial d'écrouissage isotrope.

Si $f = 0$ et $\dot{f} = 0$, on considère que l'écoulement est élasto-plastique endommageable. Ce modèle prend en compte l'endommagement du matériau (les fissures de la matrice, la décohésion au niveau de l'interface). La loi de comportement en cisaillement plan est

$$\sigma_{12}(t) = 2G_{12}^0(1-d_{12})\varepsilon_{12}^{elast}(t) \quad (2)$$

Dans ce travail, nous proposons de remplacer les lois d'évolution d'endommagement d et la plasticité cumulée p de P. Ladeveze *et al.*, (2000)

$$d_{12} = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}} \quad (3)$$

$$R = \beta p^n \quad (4)$$

par des lois polynomiales (P. Rozycki 2015)

$$d_{12} = \sum_{i=0}^m a_i \sqrt{Y}^i \quad (5)$$

$$R = \sum_{j=0}^k b_j p^j \quad (6)$$

où \sqrt{Y} correspond à force thermodynamique associée à l'endommagement ; $\sqrt{Y_0}$, $\sqrt{Y_c}$, β , n , a , b sont les paramètres du modèle. La modification des lois permet d'améliorer la représentation numérique de l'endommagement et de la plasticité cumulée (fig.1, fig.2).

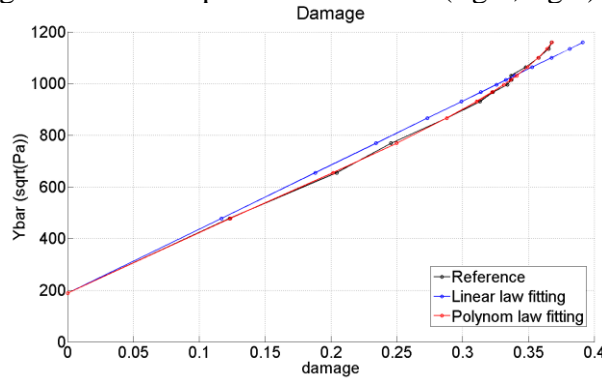


Figure 1. Relation entre endommagement et force thermodynamique

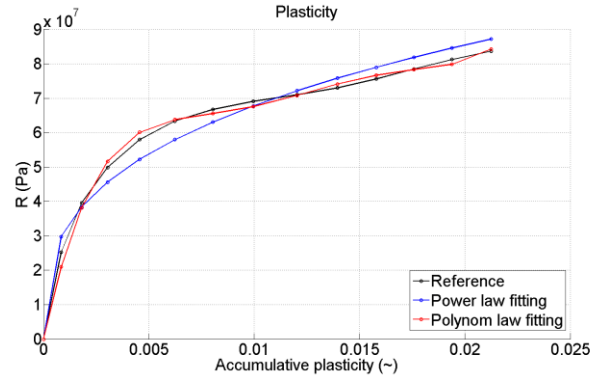


Figure 2. Relation entre plasticité accumulée et fonction d'écrouissage

2.2 Sous-modèle 2 : Décharge avec Dérivées Fractionnaires

Si $f < 0$ ou $f = 0$ et $\dot{f} < 0$, la déformation plastique et l'endommagement sont constants et la décharge est classiquement élastique-endommagée. Dans le modèle que nous proposons, nous utilisons lors de la phase de décharge ou de recharge un modèle exprimé à partir de dérivées fractionnaires (Mateos *et al.*, 2012). Cette partie du modèle permet de décrire les phénomènes dépendant de l'histoire du matériau. En particulier, Il permet de simuler le trajet réel de la courbe contrainte-déformation autour de la pente élastique endommagée, l'endommagement ayant été obtenu précédemment à partir de la partie élasto-plastique endommagable du modèle. De plus, l'approche « fractionnaire » nécessite peu de paramètres supplémentaires pour décrire le comportement du matériau. On considère que la somme de la déformation élastique et de la déformation viscoélastique peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{12}^{\text{elast}}(t) + \varepsilon_{12}^{\text{visco}}(t) = A(t) + \sum_{k=1}^n B_k D^{\alpha_k} \varepsilon_{12}^{\text{elast}}(t) \quad (7)$$

Dans le cas d'un modèle à une dérivée fractionnaire, $k=1$, la loi du comportement s'écrit :

$$\sigma_{12}(t) = G_{12}^0 (1 - d_{12}) A(t) + G_{12}^1 D^{\alpha} \varepsilon_{12}^{\text{elast}}(t) \quad (8)$$

G_{12}^0 représente le module de cisaillement non endommagé, $A(t)$ est une fonction du temps déduite de $\varepsilon_{12}^{\text{elast}}(t)$, G_{12}^1 , α sont des paramètres du matériau, D^{α} est dérivée fractionnaire d'ordre α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Le calcul fractionnaire permet d'étendre les notions de dérivation et d'intégration à des ordres non-entiers. Cette généralisation peut se faire de différentes façons. Au sens de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de la fonction $f(t)$ est définie par (Samko S.G *et al.*, 1987)

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 0 \quad (9)$$

Où $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ est la fonction gamma (fonction d'Euler de deuxième espèce).

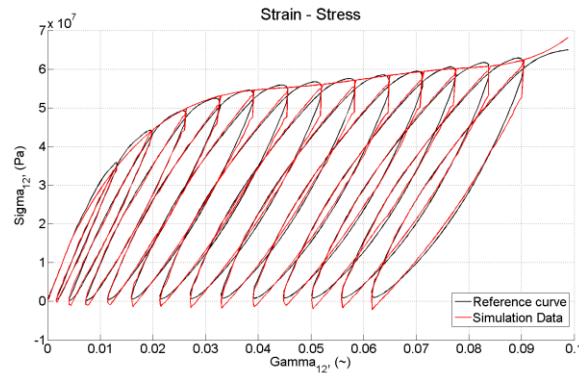


Figure 3. L'essai de cisaillement. Déformation – contrainte relation

3. CONCLUSION

La mise en œuvre du modèle de comportement permet d'obtenir les différentes quantités d'énergie dissipées lors de l'essai mécanique de traction suivant la bissectrice des fibres d'un composite tissé thermodurcissable. L'identification des paramètres de ces deux sous modèles sur l'essai de cisaillement plan montre une bonne corrélation avec les données expérimentales (fig. 3). Des chargements de fluage ou de relaxation peuvent également être décrits avec l'approche proposée. Le modèle fractionnaire développé permet de reproduire fidèlement les boucles d'hystérésis des composites stratifiés tout en restant compatible avec les modèles classiquement développés dans la littérature. La prochaine étape de notre travail consistera à implanter ce modèle dans le cadre éléments finis.

REFERENCES

- Gornet L., Westphal O., Burtin C., Bailleul J.L., Rozycki P., Stainier L., "Rapid Determination of the High Cycle Fatigue Limit Curve of Carbon Fiber Epoxy Matrix Composite Laminates by Thermography Methodology: Tests and Finite Element Simulations", *Procedia Engineering – Fatigue Design 2013, International Conference Proceedings*, **66**, (2013), pp. 697–704.
- Hochard C. and Thollon, Y. "A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions", *International Journal of Fatigue*, **32**, (2010), pp. 158-165.
- Johnson A.F., Pickett A.K., Rozycki P., "Computational methods for predicting impact damage in composite structures", *Composites Science and Technology*, **61**, 15, (2001), pp. 2183-2192.
- Ladeveze P., Allix O., Deu J.F. and Leveque D., "A mesomodel for localization and damage computation in laminates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **183**, (2000), pp. 150-122.
- Mateos M., Gornet L., Rosycki P., Aretxabaleta L., "Hysteretic shear behavior of fiber-reinforced composite laminates", *ECCM16 - 16th European Conference on Composite Materials, 23th-27th June, Sevilla, Spain*, (2014).
- Mateos M., Gornet L., Zabala H., Aretxabaleta L., Rosycki P., Cartraud P., "Hysteretic behavior of fiber-reinforced composites", *ECCM15 - 15th European Conference on Composite Materials, 21th-24th June, Venice, Italy*, (2012).
- Marguet S., Rozycki P., Gornet L., "A rate dependence constitutive model for carbon-fiber reinforced plastic woven fabrics", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **14**, 8, (2007), pp. 619-631.
- Rozycki P., "Contribution au développement de lois de comportement pour matériaux composites soumis à l'impact", *Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis*, (2000).
- Rozycki P. "Lois de comportement pour composites et outils numériques en dynamique rapide", *Mémoire en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches, (Soutenance prévue 2015)*.
- Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. "Fractional Integrals and derevatives. Theory and applications", *Nauka and Technika, Minsk* (1987).