

Modélisation de l'élastoplasticité en transformations finies avec le formalisme quadridimensionnel

M. Wang, B. Panicaud, E. Rouhaud, A. Roos, G. Altmeyer, *LASMIS, Université de Technologie de Troyes, 12 rue Marie Curie, 10004 Troyes cedex, France. Adresses électroniques : mingchuan.wang@utt.fr, benoit.panicaud@utt.fr, emmanuelle.rouhaud@utt.fr, arjen.roos@utt.fr, guillaume.altmeyer@gmail.com*

R. Kerner *LPTMC, Université Pierre et Marie Curie. Tour 23-13, Boite Courrier 121, 4 Place Jussieu, 75005 Paris, France. Adresse électronique : richard.kerner@upmc.fr*

Mots clés : modèle de comportement, plasticité, transformation finie, objectivité matérielle, dérivé de Lie.

1 Introduction

Pour établir un modèle élastoplastique incrémental concernant les transformations finies, il faut respecter le principe d'objectivité, un critère classique en mécanique des milieux continus pour s'assurer que le modèle constitutif vérifie les faits physiques suivants :

1) Invariance par rapport à la superposition de mouvement de corps rigide : quand un matériau non déformé est sollicité par un mouvement de corps rigide, aucune contrainte supplémentaire n'est générée dans le matériau.

2) Indépendance par rapport aux changements d'observateurs (ou référentiels) : lorsqu'un observateur se déplace autour d'un matériau non déformé, aucune contrainte supplémentaire n'est générée dans le matériau, quelque soit le mouvement de l'observateur.

Ce principe est important pour les effets dissipatifs dans les solides, car une formulation en variation est utilisée pour établir les modèles de comportement. Dans ce cas, en effet, une dérivée objective du tenseur des contraintes est nécessaire, également appelée transport objectif. Cependant, de nombreux transports objectifs ont été proposés, mais la difficulté reste la sélection de ces transports objectifs pour construire un modèle élastoplastique cohérent.

Par ailleurs, le formalisme quadridimensionnel de la théorie de la Relativité garantit que les tenseurs, les opérations et toutes les lois physiques sont par construction indifférents aux changements d'observateurs selon le principe de covariance. En outre, l'utilisation de ce formalisme permet également de définir une dérivée spécifique, la dérivée de Lie, utilisable pour les modèles de comportement. La dérivée de Lie d'une densité de tenseur A dans le champ de vitesse \mathbf{v} , notée $\mathcal{L}_v(A)$, décrit la variation de A :

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{A(\xi^\mu + v^\mu(t' - t)) - A(\xi^\mu)}{t' - t} = \mathcal{L}_v(A)(\xi^\mu) \quad (1)$$

vue par la particule de matière en mouvement. La particule se déplace de l'événement ξ^μ (à l'instant t), à l'événement $\xi^\mu + v^\mu(t' - t)$ (à l'instant t') avec la vitesse \mathbf{v} .

2 Modélisation de l'élastoplasticité dans un formalisme 4D

Les modèles élastoplastiques dans le cadre d'un formalisme 4D ont été tout d'abord construits à partir de la décomposition additive du taux de déformation ($d = (\frac{\partial v}{\partial x})^{sym}$)

$$d_{\mu\nu} = d_{e\mu\nu} + d_{p\mu\nu} \quad (2)$$

Selon cette décomposition, deux comportements sont nécessaires : le modèle hypoélastique pour obtenir d_e et le modèle de plasticité pour obtenir d_p . Comme la dérivée de Lie correspond à la seule

variation par rapport au temps qui soit à la fois covariante et indifférente à la superposition d'un mouvement de corps rigide, les relations seront naturellement recherchées entre la dérivée de Lie du tenseur des contraintes de Cauchy et le taux de déformation (Panicaud et al. 2013). On peut en particulier montrer que la dérivée de Lie de la déformation est égal au taux de déformation ($\mathcal{L}_v(e)_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}$) où e est le tenseur des déformations d'Euler Lagrange.

2.1 Modélisation de l'hypoélasticité à partir de l'hyperélasticité

Le modèle 4D hyperélastique choisi correspond à un modèle linéaire exprimé avec les coefficients de Lamé λ, μ (Wang et al. 2014) :

$$\sigma^{\mu\nu} = \lambda e_{e\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + 2\mu e_e^{\mu\nu} \quad (3)$$

où g est le tenseur métrique qui dans un référentiel inertiel orthonormé prend la forme :

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Deux types de modèle hypoélastique sont ensuite développés à partir du modèle hyperélastique ci-dessus :

- Un pseudo modèle, obtenu en remplaçant les tenseurs des contraintes et des déformations dans le modèle hyperélastique par leur dérivée de Lie respectivement :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{\mu\nu}) = \lambda d_{e\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + 2\mu d_{e\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \quad (5)$$

sachant que $\mathcal{L}_{v_e}(e_{e\mu\nu}) = d_{e\mu\nu}$

- Un vrai modèle, obtenu en évaluant les dérivées de Lie de chaque côté de l'équation hyperélastique :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{v_e}(\lambda e_{e\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + 2\mu e_{e\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \quad (6)$$

On peut représenter ces modèles sous une forme plus générale en utilisant un tenseur d'ordre quatre :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{\mu\nu}) = \mathcal{C}^{\mu\nu\alpha\beta} d_{e\alpha\beta} \quad (7)$$

Pseudo modèle $\mathcal{C}_1^{\mu\nu\alpha\beta} = \lambda \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + 2\mu (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta})^{Sym}$

Vrai modèle $\mathcal{C}_2^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\lambda^2}{\mu(N\lambda + 2\mu)} (\eta_{\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta}) (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}) + \lambda \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{\mu} \eta^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} + \frac{2\lambda}{N\lambda + 2\mu} \eta_{\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + 2\mu \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \sigma^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - 4(\eta^{\mu\alpha} \sigma^{\beta\nu})^{Sym}$

2.2 Modélisation de la plasticité

Le modèle de plasticité est obtenu en utilisant la théorie du potentiel plastique associé avec un écrouissage isotrope, caractérisé par le taille de la surface plastique $\kappa(r)$ (Khan et Huang, 1995). Un comportement entre le taux de déformation plastique d_p et le déviateur de la contrainte σ^D est obtenu :

$$d_{p\mu\nu} = \Xi \sigma_{\mu\nu}^D \quad (8)$$

$$\text{où } \Xi = \frac{\mathcal{L}_{v_p}(\sigma_{eff})}{\frac{\partial \kappa}{\partial r} \sigma_{eff}^D}$$

où le critère de plasticité de Von Mises est utilisé,

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \sigma_{eff} - \kappa(r) \leq 0 \\ \sigma_{eff} = \sqrt{\sigma^{D\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^D} \end{cases} \quad (9)$$

On peut alors vérifier que :

$$\mathcal{L}_{v_p}(\sigma_{eff}) = \frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial \sigma^{\mu\nu}} \frac{d\sigma^{\mu\nu}}{dt} \quad (10)$$

Le modèle plastique devient :

$$d_{p\mu\nu} = \Xi \sigma_{\mu\nu}^D \quad (11)$$

$$\text{où } \Xi = \frac{\frac{d\sigma^{\alpha\beta}}{dt} \sigma_{\alpha\beta}^D}{\frac{\partial \kappa}{\partial r} \sigma_{eff}^2}$$

En combinant un des modèles hypoélastiques et le modèle plastique, deux modèles élastoplastique sont obtenus :

$$\mathcal{L}_{ve}(\sigma)^{\mu\nu} = \mathcal{C}^{\mu\nu\alpha\beta} (d_{\alpha\beta} - \Xi \sigma_{\alpha\beta}^D) \quad (12)$$

en fonction du modèle hypoélastique choisi.

3 Application du modèle 4D à la simulation numérique 3D

Pour utiliser les modèles obtenus dans le cadre du formalisme quadridimensionnel avec un logiciel de calcul FEM 3D (Zebulon[®]) et les comparer avec des modèles 3D existants, une projection du modèle 4D sur la 3D a été faite. On obtient alors pour le pseudo modèle 3D :

$$\mathcal{L}_{ve}(\sigma^{ij}) = \lambda tr(d) I^{ij} + 2\mu d_p^{ij} - 2\mu d_p^{ij} \quad (13)$$

$$\text{où } d_p^{ij} = \frac{2\mu d_{ab} \sigma^{Dab} + 2d_{am} \sigma_b^m \sigma^{Dab} - \sigma_{ab} \sigma^{Dab} tr d}{\sigma^{Dab} \sigma_{ab}^D (\partial \kappa / \partial r + 2\mu) + 2\sigma_{am}^D \sigma_b^m \sigma^{Dab}} \sigma^{Dij}$$

et pour le vrai modèle en 3D :

$$\mathcal{L}_{ve}(\sigma^{ij}) = \xi_1 I^{ij} + \xi_2 d^{ij} - \xi_2 d_p^{ij} + tr d \sigma^{ij} - 2(d^{ia} \sigma_a^j + d^{ja} \sigma_a^i) + 2(d_p^{ia} \sigma_a^j + d_p^{ja} \sigma_a^i) \quad (14)$$

$$\text{où } \xi_1 = \frac{\lambda^2}{\mu(3\lambda + 2\mu)} tr \sigma tr d + \lambda tr d - \frac{\lambda}{\mu} \sigma^{ab} (d_{ab} - d_{pab}); \quad \xi_2 = \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} tr \sigma + 2\mu$$

$$d_p^{ij} = \frac{\xi_2 d_{ab} \sigma^{Dab} - 2d_{am} \sigma_b^m \sigma^{Dab}}{\sigma^{Dab} \sigma_{ab}^D (\partial \kappa / \partial r + \xi_2) - 2\sigma_{am}^D \sigma_b^m \sigma^{Dab}} \sigma^{Dij} \quad (15)$$

Où tr représente la trace du tenseur considéré.

Les modèles 4D projetés sur la 3D (pseudo modèle ou vrai modèle) sont comparés avec un modèle classique qui utilise une décomposition multiplicative et la dérivé de Jaumann (Sidoroff 1982). Ce modèle est :

$$\frac{D^J \sigma^{ij}}{Dt} = \lambda tr(d) I^{ij} + 2\mu d^{ij} - \frac{4\mu^2 d^{ab} \sigma_{ab}^D}{(\frac{\partial \kappa}{\partial r} + 2\mu)(\sigma_{cd}^D \sigma^{Dcd})} \sigma^{Dij} \quad (16)$$

La simulation d'un cisaillement simple a été réalisée avec les différents modèles pour comparaison (Figure 1). A partir de cette figure, on peut voir que les composantes σ_{12} sont proches pour les trois modèles. Les autres composantes (σ_{11} et σ_{33}) par contre, présentent des différences significatives. Parce que le vrai modèle hypoélastique correspond à un modèle élastique de type Hookéan, il donne exactement le même résultat que le modèle élastique initial dans le domaine élastique. En outre, des simulations numériques sur une structure poutre ont également été mises en oeuvre pour tester la pertinence des différents modèles, notamment dans la gestion du retour élastique.

4 Conclusion

Des modèles élastoplastiques ont été construits grâce au formalisme 4D dans le cadre duquel tenseurs et opérations sont nécessairement indifférents au changement d'observateurs et en utilisant la dérivée de Lie qui est une dérivée par rapport au temps indifférente à la superposition de mouvements de corps rigides. Dans la procédure de la modélisation, les modèles incrémentaux de l'hypoélasticité et la plasticité sont traités avec la dérivée de Lie et les modèles sont combinés par une décomposition additive simple. Cela démontre que la 3D est un cas particulier du formalisme 4D qui peut proposer de nouveaux modèles. Enfin, les simulations numériques sur un point matériel et une structure simple illustrent l'avantage des modèles développés avec le formalisme 4D.

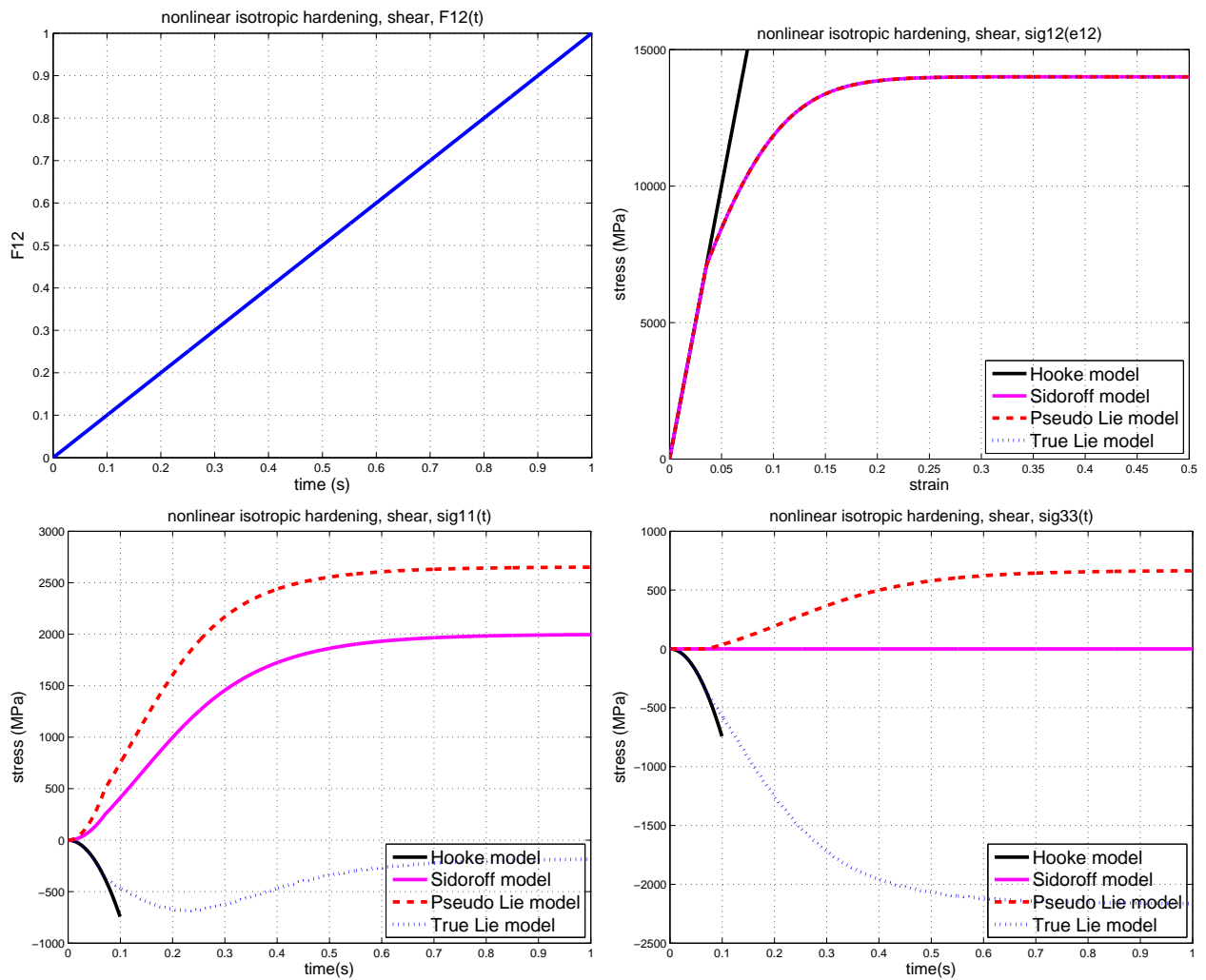


FIGURE 1 – Composantes des contraintes en fonction du temps pour un cisaillement simple

REFERENCES

- Khan A. S. Huang, S., "Continuum Theory of Plasticity", *John Wiley & Sons, Inc.*, (1995).
- Panicaud B., Rouhaud E., Kerner R., "Canonical frame-indifferent transport operators with the four-dimensional formalism of differential geometry", *Computational Materials Science*, **77**, 0, (2013), pp. 120-130.
- Sidoroff F., "Incremental constitutive equation for large strain elasto plasticity", *International Journal of Engineering Science*, **20**, 1, (1982), pp. 19-26.
- Wang M., Rouhaud E., Roos A., Panicaud B., Kerner R., Ameline O., "Anisotropic elastic behaviour using the four-dimensional formalism of differential geometry", *Computational Materials Science*, **94**, 0, (2014), pp. 132-141.