

Lois de comportement pour le calcul de structures sous chargement cyclique : choix et influence sur les réponses asymptotiques

E. Charkaluk

Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR CNRS 7649
Ecole Polytechnique, Palaiseau

Résumé

On aborde ici la modélisation du comportement élasto(visco)plastique de matériaux en vue de la détermination des réponses asymptotiques de structures soumises à des chargements cycliques. On insiste sur les concepts d'écroissage, sur les effets liés à la structure (contraintes résiduelles, écroissage structurel) et sur l'influence de ces différents aspects sur les réponses asymptotiques. Même si le cadre est très général, tous ces aspects ont été principalement développés pour les matériaux métalliques.

Mots clés : écroissage ; adaptation ; contraintes résiduelles ; structures

1. Introduction

La plupart des critères d'amorçage en fatigue, qu'ils soient associés à de la fatigue à grands ou faibles nombres de cycles, supposent une réponse dite « stabilisée » de la structure, c'est à dire une adaptation élastique ou une accommodation plastique, et c'est cette réponse qui est ensuite analysée [MOR 05, SOC 99]. De plus, il est bien connu qu'en fatigue, la présence de contraintes résiduelles, héritées le plus souvent du procédé de fabrication, affecte considérablement les durées de vie. Ainsi, que ce soit pour la détermination de ces champs de contraintes résiduelles ou pour la détermination des réponses asymptotiques, le dimensionnement de structures, a minima métalliques, sous chargements cycliques fait généralement appel à une modélisation élasto(visco)plastique du comportement du matériau. On se place donc ici dans le cadre restreint des matériaux métalliques qui a généralement dicté les modèles et concepts discutés, mais ces derniers peuvent cependant souvent être généralisés à d'autres classes de matériaux.

Dans ce cadre, si les notions de critères et surfaces de plasticité sont déjà très anciennes (voir [LUB 08] pour un large survol de la plasticité), les principaux travaux s'intéressant à la modélisation élastoviscoplastique du comportement des matériaux sous chargement cyclique ont réellement débuté avec l'essor des industries nucléaire et aéronautique. On retiendra les travaux de Prager [PRA 58], Armstrong et Frederick [ARM 66], Lemaitre et Chaboche [résumés dans LEM 85] sur la modélisation de l'écroissage, de Lemaitre [LEM 71], Chaboche [CHA 77], Cailletaud [CAI 79], Sehitoglu [SEH 89] sur les lois viscoplastiques à écroissage cinématique et isotrope ou encore de Cailletaud [CAI 95] sur la généralisation de ces lois avec plusieurs potentiels de dissipation. D'une manière générale, on peut se référer à Lemaitre et Chaboche [LEM 85], François et al. [FRA 94] ainsi qu'à Besson et al. [BES 01] pour une présentation générale du cadre de modélisation.

2. Modélisation du comportement élasto(visco)plastique

2.1 Cadre général

Dans tout ce qui suit, le cadre général de la viscoplasticité est retenu, la plasticité en constituant un cas limite. La modélisation du comportement élastoviscoplastique des matériaux suppose de répondre à deux questions [SUQ 04] : *quand* a lieu l'écoulement viscoplastique et *comment* s'effectue-t-il ? La réponse à la première question est liée à la notion de *surface seuil* (ou fonction, surface de charge, généralement notée f) et la seconde réponse est liée, pour simplifier, à la notion de *loi d'écrouissage* faisant intervenir les déformations viscoplastiques. On a généralement l'habitude de s'appuyer sur des comportements caractérisés par des lois ne faisant intervenir qu'une seule déformation viscoplastique [LEM 85], mais cela n'est en rien restrictif.

L'écrouissage, quant à lui, est généralement décomposé en une part isotrope, qui correspond à la variation de la taille de la surface seuil après déformation et qui est un scalaire souvent noté R , et en une part cinématique, qui correspond au déplacement du centre de la surface seuil dans l'espace des contraintes et qui est un tenseur souvent noté \underline{X} . Ce cadre permet alors de prendre en compte, entre autres et plus ou moins bien, les effets de rochet [CHA 91, OHN 93] ou encore de vieillissement liés à des changements microstructuraux [CAI 79, NIC 99, SMI 99] par l'ajout de variables internes. Une synthèse très complète a été réalisée par Chaboche [CHA 08]. L'ensemble des travaux précédemment cités a montré que, dans le cas général, une représentation suffisamment complète du comportement plastique ou viscoplastique de nombreux matériaux métalliques faisait appel à un écrouissage isotrope et à un ou plusieurs écrouissages cinématiques, tous non linéaires.

Nous nous plaçons cependant ici dans un cadre plus simple en découplant les modèles de comportement de ceux associés aux changements microstructuraux, à l'endommagement, et en ne considérant pas explicitement les couplages physicochimiques (oxydation par exemple). Le cadre retenu, sous l'hypothèse des petites perturbations, correspond alors aux hypothèses suivantes.

Le tenseur des déformations totales se décompose de manière additive en trois parties :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_{an} + \underline{\underline{\varepsilon}}_{th} \quad [1]$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}_e$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{an}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}_{th}$ sont respectivement les tenseurs de déformation élastique, anélastique et thermique.

La fonction de charge f choisie pour décrire la frontière du domaine élastique correspond ici au critère de von Mises :

$$f = J_2(\underline{\underline{A}}) - R \quad [2]$$

où $J_2(\underline{\underline{A}}) = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}}$ et $\underline{\underline{A}} = dev(\underline{\underline{\sigma}}) - \underline{\underline{X}}$. $\underline{\underline{X}}$ est ici considéré purement déviatorique car la déformation plastique est supposée s'effectuer sans changement de volume.

Dans le cas des matériaux standards généralisés [HAL 75], on peut montrer que les lois d'écoulement anélastiques $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{an}$ respectent alors la règle de normalité qui s'écrit sous la forme d'un scalaire, le multiplicateur viscoplastique $\dot{\lambda}$, porté par une direction normale à la surface de charge dans l'espace des déviateurs :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_{an} = \dot{\lambda} \frac{\underline{\underline{A}}}{\|\underline{\underline{A}}\|} \quad [3]$$

Dans le cas des MSG, cette relation découle de la définition de la surface de charge et la loi est dite *associée*. Cette relation est généralisée dans le cas des modèles *non associés*.

2.2 Modélisation de l'écroissage

2.2.1 Elastoplasticité

Ainsi, sous ces hypothèses, un modèle désormais classique de plasticité à écroissages cinématique et isotrope non linéaires [LEM85] est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} R = R_0 + g(p) \\ \underline{\dot{X}} = \frac{2}{3} C \underline{\dot{\alpha}} \quad \text{avec} \quad \underline{\dot{\alpha}} = \underline{\dot{\varepsilon}}_{an} - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \underline{X} \dot{p} \end{cases} \quad [4]$$

où C et γ sont les paramètres liés à l'écroissage, R_0 est la limite d'élasticité initiale, $g(p)$ est une fonction non linéaire de la déformation plastique cumulée définie par $p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\dot{\varepsilon}}_{an} : \underline{\dot{\varepsilon}}_{an}} dt$ et le

multiplicateur anélastique $\dot{\lambda}$ est déterminé par la condition de cohérence vérifiée à tout instant, $\dot{f} = 0$. Ce modèle est aujourd'hui très largement utilisé dans le calcul de structure, sa présence dans la plupart des codes de calcul par éléments finis en explique en partie le succès. On peut toutefois noter son incapacité à représenter correctement les effets de rochet, c'est à dire de déformation progressive de la structure. On pourra se reporter pour cela à [POR 00] qui fait une comparaison intéressante d'un certain nombre de lois d'écroissage utilisées dans ce cas précis et montre, dans le cas d'essais multiaxiaux, l'influence considérable de la loi d'écroissage sur les vitesses de rochet simulées, comparées aux résultats expérimentaux. Ce type d'essai, non trivial, peut donc être tout à fait pertinent et discriminant dans le choix d'une loi d'écroissage.

2.2.2 Elastoviscoplasticité

De même, un modèle simple de viscoplasticité à écroissage cinématique linéaire et à viscosité non linéaire du type Norton-Hoff sera défini par le groupe d'équations suivant :

$$\begin{cases} R = R_0 \\ \underline{\dot{X}} = C \underline{\dot{\varepsilon}}_{an} \\ \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{J_2(\underline{A}) - R}{K} \right\rangle^n \end{cases} \quad [5]$$

où K et n sont les paramètres liés à la viscosité et $\langle - \rangle$ sont les crochets de Mc Cauly qui indiquent que $\langle u \rangle = u$ si $u > 0$, sinon 0. Ces modèles de plasticité et de viscoplasticité sont largement discutés dans [LEM 85, BES 01] et constituent des premières étapes dans la modélisation d'un comportement anélastique. Ainsi, le comportement dépendant ou non de manière évidente de la température et de la vitesse, des modèles élastoplastiques ou élastoviscoplastiques seront retenus. Par exemple, dans le cas de la fatigue thermique à grand nombre de cycles de structures en acier 304 soumises à des températures maximales inférieures à 300°C, un modèle plastique semble suffisant en vue de leur dimensionnement [AMI 05]. Il en est de même pour des freinages à faible énergie sur des disques de freins en fonte [NGU 02] qui entraînent des températures maximales inférieures à 400°C. En revanche, dès que la température maximale devient très importante (moteurs automobiles, turbines terrestres ou aéronautiques, ...), une modélisation viscoplastique s'impose afin de pouvoir prendre en compte, entre autres, les effets de la vitesse de déformation ou du temps (fluage, relaxation) et, selon la complexité des comportements rencontrés, un modèle

relativement simple comme celui présenté auparavant, associant viscosité non linéaire du type Norton et écrouissage cinématique linéaire, peut être suffisant [CHA 02]. Cependant, un tel modèle possède quelques limites liées, entre autres, à la modélisation de la viscosité ne permettant pas toujours de représenter correctement à la fois l'influence de la vitesse de déformation et l'effet du temps (fluage, relaxation). Dans ce cas, ce sont généralement les lois d'écrouissage ou le potentiel visqueux qui sont enrichis de plusieurs manières différentes :

- combinaison de plusieurs écrouissages cinématiques,
- introduction de termes de restauration dans la loi d'écrouissage [BUC 04]. Les lois d'écrouissage utilisées ici sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_0 + Q(1 - \exp(-bp)) \\ \dot{\underline{X}} = \frac{2}{3} C \dot{\underline{\alpha}} \quad \text{avec} \quad \dot{\underline{\alpha}} = \dot{\underline{\varepsilon}}_{an} - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \underline{X} \dot{p} - \frac{\underline{X}}{\|\underline{X}\|} \left(\frac{J_2(\underline{X})}{M} \right)^m \end{array} \right. \quad [13.7]$$

où M et m sont deux paramètres de restauration dépendant du matériau et de la température.

- définition d'un nouveau potentiel visqueux [SZM 07], inspiré de [DYS 98, CHA 01] conduisant à l'écriture suivante du multiplicateur anélastique

$$\dot{\lambda} = \left[\dot{\varepsilon}_0 \left(1 + \left(\frac{J_2(\underline{A}) - R}{H} \right)^2 \right) \sinh \left(\frac{J_2(\underline{A}) - R}{K} \right) \right] \quad [13.8]$$

où $\dot{\varepsilon}_0$, H et K sont trois paramètres dépendant du matériau et de la température.

Ces deux derniers exemples permettent de représenter le comportement viscoplastique dans une large gamme de sollicitations isothermes ou anisothermes, comme en témoignent la Figure 1, extraite de [BUC 04]. On pourra se reporter à [CHA 09] pour plus d'éléments sur le calcul et le dimensionnement en fatigue thermique.

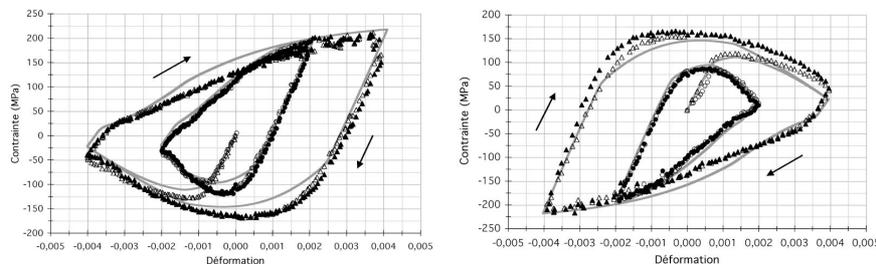


Figure 1. Comparaison entre modèle et résultats expérimentaux dans le cas d'essais thermomécaniques hors-phase (à gauche) et en-phase (à droite) entre 250°C et 850°C pour un acier F17TNb [BUC 04].

2.3 Implémentation numérique et identification des paramètres

Afin d'implémenter de tels modèles de comportement dans un code de calcul par éléments finis, un schéma implicite utilisant la technique du retour radial, proposée initialement par [NGU 77] et détaillée dans [SIM 98], peut être utilisé (voir détails dans [CON 04a]). Ce schéma permet d'obtenir une convergence rapide et une réponse mécanique inconditionnellement stable. D'autres schémas sont présentés dans [BES 01]. La dernière étape avant de pouvoir réaliser un calcul de structure est l'identification des paramètres constitutifs des modèles et ce, éventuellement, sur toute la gamme de température d'utilisation. Classiquement, cette identification est réalisée à partir d'essais

uniaxiaux isothermes en minimisant une fonctionnelle coût [CON 04b], norme représentant un « écart » entre courbes expérimentales et courbes simulées, et ce, en utilisant différentes techniques d'optimisation comme des méthodes de gradient ou des algorithmes évolutionnaires [CON 04b, AND 07].

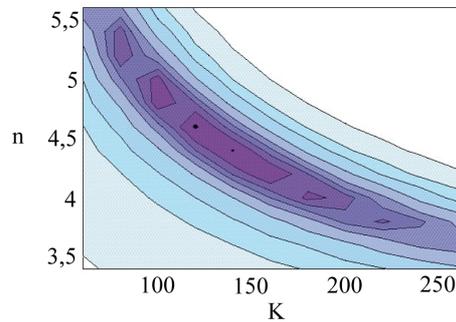


Figure 2. Vallée de minima de la fonction coût montrant le couplage entre les paramètres visqueux K et m d'un modèle viscoplastique à écrouissage cinématique linéaire identifié pour un alliage d'aluminium A356 [CON 04b].

Cependant, comme le montre la Figure 2, les lois d'écrouissages viscoplastiques généralement choisies et les techniques d'identification retenues conduisent non seulement et de manière évidente à la non unicité de la solution, mais surtout à l'existence de vallées de minima. Une manière originale d'aborder cette question est alors de tenter d'identifier dans le comportement elastoviscoplastique retenu, la dissipation intrinsèque et la part d'énergie stockée dans l'écrouissage via l'étude des couplages thermomécaniques dans le cadre de la Thermodynamique des Processus Irreversibles [GER 73]. Un certain nombre de travaux montre alors que la mesure des variations de température sous chargements cycliques liées aux couplages thermoplastiques peut être tout à fait discriminante [HAK 05, VIN 08].

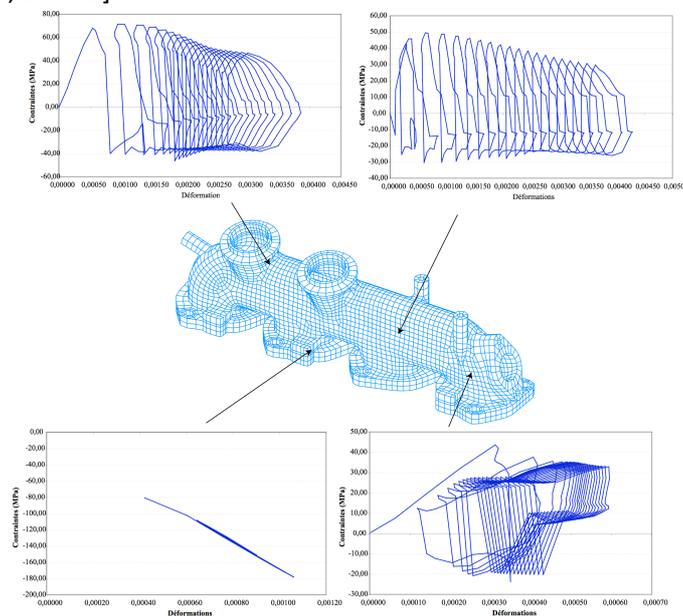


Figure 3. Réponses asymptotiques obtenues sur un collecteur d'échappement sous chargement thermomécanique cyclique [SZM 07].

3. Calculs de structure

3.1 Réponses asymptotiques

Comme cela a été souligné dans l'introduction, on peut rappeler ici que l'approche proposée consiste à déterminer la réponse mécanique stabilisée de la structure. C'est elle qui va servir ensuite à définir la durée de vie à l'aide de différents critères d'amorçage de fissures en fatigue. On rappelle que les différentes réponses asymptotiques d'une structure sont l'adaptation élastique, l'accommodation (visco)plastique et le rochet et la complexité d'une structure (géométrie, chargement, et surtout loi d'érouissage retenue) peut entraîner localement des réponses très différentes (voir figure 3, extraite de [SZM 07]).

3.2 Calculs directs

Ainsi, même si elles sont utilisées ici, les méthodes incrémentales classiques ne sont pas forcément les plus performantes pour déterminer cette réponse puisqu'elles nécessitent le calcul de tous les cycles intermédiaires avant d'atteindre le cycle stabilisé. Une première solution consiste à effectuer des « sauts de cycles » (cycles skip) [NIC 02]. Des méthodes alternatives permettant de déterminer directement cette réponse stabilisée peuvent également être envisagées, sous des hypothèses relativement restrictives pour certaines [ZAR 90], ou non [MAI 02, NGU02]. Une étude comparative de diverses méthodes de calcul, simplifiées ou non, a été réalisée par Amiable et al. [AMI 05] et plus récemment par [BAU 16] qui montre en particulier la pertinence des méthodes directes.

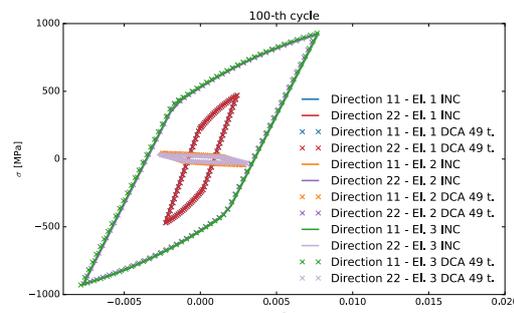


Figure 4. Comparaison entre calculs cycliques directs (DCA) et incrémentaux (INC) dans le cas d'un chargement équi-biaxial sur une éprouvette plane [BAU 16].

4. Conclusion

Ce cours aborde l'élastoviscoplasticité sous l'angle du calcul de structures. On retiendra que les choix qui sont faits quant aux lois d'écoulements viscoplastiques et aux lois d'érouissage ont une influence très importante sur les réponses asymptotiques des structures (adaptation, accommodation, rochet). Il est donc primordial de disposer d'essais de validation discriminants (multiaxiaux par exemple) et/ou d'un cadre de modélisation plus riche comme la TPI associée à des mesures thermomécaniques. Des stratégies numériques alternatives aux calculs incrémentaux peuvent également être mises en œuvre afin de déterminer plus rapidement, voire directement, les réponses asymptotiques des structures. C'est alors ces réponses qui seront analysées en vue du dimensionnement en fatigue.

Remerciements

Andrei Constantinescu, Habibou Maitournam et Ky Dang Van pour les discussions toujours passionnantes sur les concepts d'adaptation et d'accommodation et Luc Rémy pour nos fructueux échanges dans le cadre d'un cours de fatigue thermique [CHA 09] dont une partie de ce cours est extraite.

Références

- [AMI 05] Amiable, S. « Prédiction de durée de vie de structures sous chargement de fatigue thermique », Thèse de l'Université de Versailles, Spécialité : Mécanique, 2005.
- [AND 07] Andrade-Campos, A., Thuillier, S., Pilvin, P. et Teixeira-Dias, F., « On the determination of material parameters for internal variable thermoelastic–viscoplastic constitutive models », *Int. J. Plast.*, vol. 23, no. 8, p. 1349-1379, 2007.
- [ARM 66] Armstrong, P. J. et Frederick, C. O., « A mathematical representation of the multiaxial baushinger effect », Berkeley Nuclear Laboratories, 1966.
- [BAU 16] Baudoin, P., Magisano, D., Constantinescu, A., Charkaluk, E. « A critical assessment of the direct cyclic method for fatigue design », submitted, 2016.
- [BES 01] Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J. L. et Forest, S., « Mécanique non linéaire des matériaux », Hermès, 2001.
- [BUC 04] Bucher, L., « Etude de l'endommagement en fatigue thermique des aciers inoxydables F17TNB et R20-12 pour application automobile », Thèse de l'Ecole des Mines de Paris, Spécialité : Mécanique, 2004.
- [CAI 79] Cailletaud, G., « Modélisation mécanique d'instabilités microstructurales en viscoplasticité cyclique à température variable », Thèse de l'Université Paris VI, Spécialité : Mécanique, 1979.
- [CAI 95] Cailletaud, G. et Sa, K. « Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms », *Int. J. Plast.*, vol. 11, p. 991-1005, 1995.
- [CHA 77] Chaboche, J.L. « Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behaviour of metals », *Bull. Acad. Polonaise Sci.*, vol. 25, n. 1, p. 33-42, 1977.
- [CHA 91] Chaboche, J. L., « On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratcheting effects », *Int. J. Plast.*, vol. 7, p. 661-678, 1991.
- [CHA 01] Chaboche, J. L. et Gallerneau, F., « An overview of the damage approach to durability modeling at elevated temperature », *Fat. Fract. Engng. Mater. Struct.*, vol. 24, p. 405-417, 2001.
- [CHA 02] Charkaluk, E., Bignonnet, A., Constantinescu, A. et Dang Van, K., « Fatigue design of structures under thermomechanical loadings », *Fat. Fract. Engng. Mat. Struct.*, vol. 25, p. 1199-1206, 2002.
- [CHA 08] Chaboche, J.L., « A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories », *Int. J. Plast.*, vol. 24, p. 1642–1693, 2008.
- [CHA 09] Charkaluk, E., Rémy, L., « *La fatigue des matériaux et des structures - volume 4, chapitre La fatigue thermique* », pages 301–370. Hermes-Lavoisier, 2009.
- [CON 04a] Constantinescu, A., Charkaluk, E., Lederer, G. et Verger, L., « A computational thermomechanical fatigue design method: application to exhaust manifolds », *Int. J. Fat.*, vol. 26, p. 805-818, 2004.
- [CON 04b] Constantinescu, A. et Dang Van, K., « A global computational approach in engineering problems - Identification of fatigue », Lecture notes 10, IPPT PAN and CoE AMAS pub., 2004.
- [DYS 98] Dyson, B.F. et McLean, M., « Microstructural evolution and its effects on the creep performance of high temperature alloys », In: *Microstructural stability of creep resistant alloys for high temperature plant applications*, Strang, A., Caxley, J. et Greenwood, G.W., Inst. Mater., London, p. 371-392, 1998.
- [FRA 94] Francois, D., Pineau, A. et Zaoui, A., « Comportement mécanique des matériaux - vol II », Hermès, 1994.
- [GER 73] Germain, P., « Cours de mécanique des milieux continus, tome 1 : théorie générale », Masson, 1973.

- [HAK 08] Hakansson, P., Wallin, M., Ristinmaa, M., « Comparison of isotropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity », *Int. J. Plast.*, vol. 21, p. 1435-1460, 2005.
- [HAL 75] Halphen, B. et Nguyen, Q. S., « Sur les matériaux standards généralisés », *J. Mécanique*, vol. 14, p. 39-63, 1975.
- [LEM 71] Lemaitre, J., « Sur la détermination des lois de comportement des matériaux elasto-viscoplastiques », Publication ONERA N°135, 1971.
- [LEM 85] Lemaitre, J. et Chaboche, J. L., « Mécanique des matériaux solides », Dunod, Paris, 1985.
- [LUB 08] Lubliner, J., « Plasticity theory », Dover, 2008.
- [MAI02] Maïtournam, H., Pommier, B. et Thomas, J.J., « Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermomécanique cyclique », *C.R. Mécanique*, vol. 330, p. 703-708, 2002.
- [MOR 05] Morel, F., Henaff, G., « Fatigue des structures », Ellipses, 2005.
- [NGU 77] Nguyen, Q.S., « On the elastic plastic initial-value problem and its numerical integration », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 11, p. 817-832, 1977.
- [NGU 02] Nguyen-Tajan T.M.L., « Modélisation thermomécanique des disques de frein par une approche eulérienne », Thèse de l'École Polytechnique, Spécialité : Mécanique, 2002.
- [NIC 99] Nicouveau-Bourles, E., « Etude expérimentale et numérique du vieillissement d'un alliage d'aluminium. Application aux culasses automobiles », Thèse de l'École des Mines de Paris, Spécialité : Mécanique, 1999.
- [NIC 02] Nicouveau, E., Feyel, F., Quilici, S. et Cailletaud, G., « Structural calculation and lifetime prediction in thermomechanical fatigue of engine components », In: L. Remy and J. Petit, Editor(s), European Structural Integrity Society, Elsevier, Volume 29, *Temperature-fatigue Interaction, International Conference on Temperature-Fatigue Interaction, Ninth International Spring Meeting*, p. 331-340, 2002.
- [OHN 93] Ohno, N. et Wang, J. D., « Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I: formulation and basic features for ratcheting behaviour », *Int. J. Plast.*, vol. 9, p. 375-390, 1993.
- [POR 00] Portier, L. Calloch, S. Marquis, D., Geyer, P., « Ratcheting under tension-torsion loadings: experiments and modelling », *Int. J. Plast.*, vol. 16, p. 303-335, 2000.
- [PRA 58] Prager, W., « Problèmes de plasticité théorique », Dunod, Paris, 1958.
- [SEH 89] Sehitoglu, H., « Changes in state variables at elevated temperatures », *J. Eng. Mater. Technol.*, Trans. ASME, vol. 111, p. 192-203, 1989.
- [SIM 98] Simo, J. C. et Hughes, T. J. R., « Computational inelasticity », Springer-Verlag, 1998.
- [SMI 99] Smith, T., Maier, H.J., Sehitoglu, H., Fleury, E. et Allison, J., « Modelling high-temperature stress-strain behavior of cast aluminum alloys », *Met. Mat. Trans.*, vol. 30A, p. 133-146, 1999.
- [SOC 99] Socie, D., Marquis, G., « Multiaxial fatigue », SAE International, 1999.
- [SUQ 04] Suquet, P., « Rupture et plasticité », cours de l'École Polytechnique, 2004
- [SZM 07] Szmytka, F., « Nouveaux modèles de comportement élasto-viscoplastique pour des matériaux métalliques. Application au dimensionnement de structures automobiles », Thèse de l'École Polytechnique, Spécialité : Mécanique, 2004
- [VIN 08] Vincent, L., « On the ability of some cyclic plasticity models to predict the evolution of stored energy in a type 304L stainless steel submitted to high cycle fatigue », *Eur. J. Mech./A*, vol. 27, p. 161-180, 2008.
- [ZAR 90] Zarka, J., Frelat, J., Inglebert, G. et Kasmai-Navidi, P., « A new approach in inelastic analysis of structures », Ecole Polytechnique, 1990.