

Analyses en fatigue à grand nombre de cycles : Apport des approches probabilistes

F. Hild^a

a. LMT, ENS Paris-Saclay / CNRS / Université Paris-Saclay
Courriel : hild@lmt.ens-cachan.fr

Résumé

Il est proposé de discuter de différents aspects liés à la prévision de la fiabilité en fatigue à grand nombre de cycles d'aciers et alliages. Des approches probabilistes sont tout d'abord présentées dans le cadre de l'hypothèse du maillon le plus faible. Dans un deuxième temps, on analyse une situation où l'on observe une réponse mettant en jeu une part de plus en plus importante de sites de microdissipation lors d'essais d'autoéchauffement. On montrera comment cette information peut être reliée aux propriétés d'endurance. Enfin un troisième cas concerne des situations dans lesquelles des réseaux de fissures peuvent être formés. Il s'agira alors de comprendre comment amorçage, propagation et coalescence peuvent coexister.

Mots clés : amorçage ; autoéchauffement ; coalescence ; défauts ; microplasticité ; probabilité de rupture ; processus ponctuel de Poisson ; propagation ; réseau de fissures

1. Introduction

Dans l'industrie, la rupture de pièces en service causée par la fatigue reste un problème majeur et courant. La difficulté à prévoir le comportement à la fatigue réside dans la nature de la sollicitation, qui est le plus souvent multiaxiale et aléatoire, dans l'hétérogénéité des contraintes au sein des pièces en service et dans les sources de dispersion. Le passage de l'éprouvette, où les sollicitations sont simples (généralement uniaxiales) et les contraintes homogènes, à la structure reste mal maîtrisé. Néanmoins, des approches probabilistes [1-11] ont montré qu'il était possible de rendre compte simplement (sans ajout de paramètre) de l'effet d'hétérogénéité des contraintes, mais aussi de l'effet de volume voire de la distribution de défauts. Avec ces approches, la limite d'endurance moyenne dépend du volume effectif [12, 13] voire de la surface effective [14, 15]. L'identification de cette dernière de manière directe (ou indirecte) en fonction de tous ces paramètres reste d'actualité, notamment en ce qui concerne le niveau de dispersion. Il existe également des situations dans lesquelles les concepts précédents ne s'appliquent pas directement. Ceci est notamment le cas du faïençage thermique. Il s'agit alors de voir comment ces différents aspects peuvent être traités de manière la plus unifiée possible.

Cette présentation se décompose en trois parties. Tout d'abord, des formulations probabilistes sont introduites dans le cas où l'hypothèse du maillon le plus faible s'applique. D'une part les premiers développements sont basés sur une vision macroscopique des phénomènes décrits. D'autre part, la connaissance des micromécanismes d'endommagement par fatigue permet leur prise en compte de manière explicite dans la probabilité de rupture. L'évaluation de cette dernière nécessite généralement un nombre important d'essais.

Une technique alternative d'identification, moins coûteuse et plus rapide en utilisant des mesures de température, est ensuite présentée [16-23]. On peut montrer que, sous certaines hypothèses, une partie des ingrédients développés ci-dessus peut servir à relier deux informations (température et limite d'endurance) *a priori* indépendantes. Ceci est rendu possible en modélisant l'activation de sites de microdissipation à l'aide d'un processus ponctuel de Poisson [24].

Enfin, dans d'autres situations telles que la fatigue thermique, on peut observer la formation stable de réseaux de fissures. Il est proposé de discuter comment les concepts introduits précédemment peuvent être étendus pour rendre compte de ce phénomène qui allie amorçage, propagation et coalescence de fissures.

2. Hypothèse du maillon le plus faible en fatigue à grand nombre de cycles

S'il est un domaine où les approches probabilistes sont incontournables, c'est bien celui de la fatigue à grand nombre de cycles. La dispersion des résultats, par exemple en termes de contrainte de rupture en fonction du nombre de cycles, est un fait avéré depuis de très nombreuses décennies [1-4]. Le concept le plus courant est de faire l'hypothèse du maillon le plus faible [25, 26] pour mener un dimensionnement probabiliste. Ainsi seule la phase d'amorçage est généralement décrite. Les premières approches ont essentiellement consisté à décrire les phénomènes observés à partir d'analyses macroscopiques. Cependant, la prise en compte des micromécanismes d'endommagement a conduit, plus récemment, à des modèles plus sophistiqués et prédictifs.

Une première cause de rupture par fatigue est liée à la présence de défauts induits par le processus de fabrication (p.ex., défauts de fonderie [8, 9, 27], inclusions d'alliages obtenus par métallurgie des poudres [6, 7]). Des études plus fondamentales avec des microdéfauts contrôlés ont également été menées [28-30]. Elles montrent que la limite d'endurance dépend de manière non triviale de paramètres équivalents de taille de défaut [28] ou de fissure [31]. Ces analyses permettent également de relier la distribution initiale de défauts, avec différentes descriptions morphologiques et statistiques [13, 29], à la dispersion des limites d'endurance, voire de tout le régime de fatigue à grand nombre de cycles (décrit par les courbes de Woehler [32]).

A partir d'observations microscopiques, il a également été mis en évidence qu'en fatigue à grand nombre de cycles, la microplasticité apparaît généralement dans quelques grains, souvent ceux les mieux orientés (i.e., ceux qui ont une cission maximale [33]) et que cette microplasticité est responsable de la ruine par cyclage répété. C'est à partir de ce constat que des approches multiéchelles [34-36] ont été développées pour traiter des problèmes de fatigue. Elles sont très efficaces pour des sollicitations uniaxiales, mais montrent le plus souvent des limites pour des sollicitations multiaxiales [37], notamment pour des trajets non proportionnels, à l'exception de quelques modèles comme celui de Papadopoulos et al. [35]. La difficulté de l'étude de la multiaxialité réside dans le traitement des sollicitations non proportionnelles. En effet, au cours de celles-ci, plusieurs directions peuvent être activées, ce qui a pour conséquence d'augmenter la probabilité de ruine et de mettre en échec les approches classiques.

On peut développer une approche multiéchelles probabiliste qui puisse rendre compte de cet effet. Il s'agit d'étendre la notion de volume effectif aux trajets multiaxiaux non proportionnels. Ainsi, comme pour le traitement du problème de l'hétérogénéité des contraintes, le fait d'avoir une approche probabiliste permettra de rendre compte du nombre de directions potentiellement activables. Pour cela, on se place à l'échelle des plans de glissement et on considère que le seuil de plasticité est une variable aléatoire [38].

3. Essais d'autoéchauffement et propriétés à l'endurance

Depuis plus de deux décennies, un certain nombre d'équipes de recherche travaille sur la compréhension et sur la détermination des propriétés à la fatigue à grand nombre de cycles des matériaux métalliques à partir d'essais dits « d'autoéchauffement » [23, 24, 39-41]. Cette méthode est basée sur l'observation de l'évolution de la température moyenne stabilisée d'une éprouvette soumise à une séquence de chargements cycliques par blocs. Lors de ce type d'essais, on observe, une fois passé un certain niveau de chargement, que la température moyenne stabilisée de l'éprouvette augmente de façon significative. Cette augmentation de température est reliée au fait que la limite de microplasticité (et de fatigue) du matériau a été dépassée, donnant ainsi naissance à des mécanismes dissipatifs de microplasticité.

L'interprétation de ces observations expérimentales basée sur le développement d'un modèle probabiliste à deux échelles montre que cette approche permet, avec un nombre réduit d'éprouvettes, d'estimer non seulement la limite d'endurance moyenne d'un acier ou d'un alliage, mais également de prévoir la dispersion des résultats des campagnes d'essais classiques de fatigue. Ce type d'essais permet également de quantifier rapidement l'influence de différents paramètres (contrainte moyenne, taille moyenne des grains, multiaxialité du chargement mécanique [42], pré-déformation plastique...) sur les propriétés à la fatigue à grand nombre de cycles des aciers.

Pour cela, un cadre étendu basé sur un processus ponctuel de Poisson se révèle être très utile. Il permet, *de manière unifiée*, de rendre compte de l'augmentation graduelle de la température en fonction de l'amplitude de contrainte appliquée (lors d'essais d'autoéchauffement pour lesquels l'hypothèse du maillon le plus faible ne s'applique pas). En supposant que les mêmes mécanismes dissipatifs sont actifs en fatigue à grand nombre de cycles, on peut également décrire la probabilité de rupture à l'aide de l'hypothèse du maillon le plus faible [24].

On notera que ces concepts ont également pu être étendus à la prise en compte de défauts initiaux comme sources (potentielles) de microdissipation. Cette dernière se concentre alors au voisinage immédiat de ces défauts. Une modification de l'intensité du processus ponctuel de Poisson a été proposée pour prendre en compte sa dépendance à la contrainte hydrostatique [40].

4. Formation de réseaux de fissures

Dans le domaine du nucléaire, le phénomène de fatigue thermique a depuis longtemps été identifié comme étant responsable de plusieurs incidents [43]. Même si aujourd'hui ce type de risque est assez bien maîtrisé, il reste une cause possible d'endommagement de certains composants tels que les canalisations de différents circuits de refroidissement fortement exposés aux sollicitations thermiques. L'incident de Civaux en 1998 a par exemple conduit à une fuite d'un débit estimé à 30 000 l/h. Dans ce dernier cas, le faïençage thermique, observé sur la surface de rupture n'était pas la cause de la défaillance [44].

Lorsqu'une structure est soumise à des cycles de chauffage et refroidissement alternés, la dilatation thermique est partiellement entravée. Ainsi, les sollicitations thermiques hétérogènes à l'intérieur des canalisations de centrales nucléaires induisent un fort gradient de contrainte dans l'épaisseur. Ce gradient favorise l'arrêt de fissures en profondeur et donc le multi-amorçage en surface, d'où la formation de réseaux de fissures (ou « faïençage thermique »). Afin de mieux comprendre et maîtriser cet endommagement superficiel, différentes études ont été lancées et mettent en jeu des compétences allant de la thermohydraulique à la science des matériaux en passant par la mécanique

des matériaux et des structures. Néanmoins, il est encore difficile aujourd'hui de prédire avec précision la formation et la propagation de ces réseaux.

La formation d'un réseau de fissures de fatigue thermique passe par plusieurs étapes majeures. Tout d'abord, on observe l'amorçage en surface de microfissures intragranulaires sur des bandes de glissement persistantes [45, 46] ou dans quelques cas sur des défauts de type « soufflure » [45]. Ensuite ces microfissures se propagent et coalescent pour former des microfissures plus grandes (de la taille de quelques grains) [47]. Enfin, une fois ce réseau de « mésofissures » formé, la propagation des fissures est altérée par deux phénomènes concurrents : la coalescence, qui tend à accélérer la propagation, et l'obscurcissement, qui ralentit ou arrête la propagation de certaines fissures [48-50]. Ainsi des macrofissures, dont la profondeur est limitée par le gradient de contrainte, se forment. Cette limitation en profondeur permet à plusieurs fissures de se développer jusqu'à former un réseau qui endommage complètement la surface affectée.

Afin de pouvoir décrire ces différents stades de développement de réseaux de fissures, différents ingrédients sont nécessaires. En partant à nouveau d'un processus ponctuel de Poisson pour la description graduelle de l'amorçage, le point clé concerne la modélisation de l'intensité du processus. Des modèles mésoscopique [51] puis microscopique [52] ont été successivement développés. Ils sont notamment liés à l'obtention d'informations de plus en plus fines concernant la densité de fissures. Afin de rendre compte de la compétition entre amorçage multiple et propagation de fissures déjà existantes, la notion d'obscurcissement [53, 54] initialement introduite en fragmentation dynamique a été généralisée au cas de la fatigue à grand nombre de cycles. Cela consiste à considérer une zone autour de la fissure où les contraintes étant relaxées elles interdisent tout nouvel amorçage. A contrario, la coalescence est associée au chevauchement de zones d'amplification des contraintes. De manière générale, on peut montrer que dans ce type de scénario, l'inhibition de l'amorçage et l'arrêt de fissure par d'autres fissures se propageant est fondamental. Par contre la coalescence est secondaire par rapport aux mécanismes précédents [50].

5. Conclusion

Bien que généralement simples, les modèles probabilistes introduits permettent de rendre compte de l'amorçage (continu) de microfissures, la propagation de mésofissures et l'inhibition de l'amorçage voire l'arrêt de la propagation, ainsi que la coalescence dans un cadre probabiliste unifié. Un des points clés repose sur l'identification des paramètres liés au matériau étudié. Une attention particulière doit être portée de par l'aspect aléatoire inhérent à la fatigue à grand nombre de cycles. Dans les tous exemples traités, on notera que la seule source de dispersion prise en compte est liée au mécanisme d'endommagement par fatigue du matériau. Cependant d'autres sources de dispersion existent, par exemple, celles liées au chargement voire à la détection des fissures elles-mêmes. Ces informations sont extrêmement importantes si l'on souhaite développer des procédures de maintenance d'installations industrielles. En effet, si des fissures sont détectées, il est souhaitable de savoir si l'exploitation de la structure peut se poursuivre ou si un régime de fonctionnement dégradé pourrait être envisagé. A l'aide d'approches mécano-fiabilistes, on peut obtenir des cartographies de risque et évaluer l'évolution de la fiabilité du composant étudié. Les effets d'une actualisation de la connaissance de la longueur de fissure au cours de la vie de ce composant en termes d'incertitude de prévision et d'extension de durée de vie résiduelle prévisionnelle peut également être obtenue en vue d'optimiser les opérations de maintenance [55, 56].

Remerciements

Ce texte est issu de travaux et discussions avec A.-S. Béranger, R. Billardon, P. Boutet, V. Denier, S. Calloch, I. Chantier-de Lima, P. Cugy, C. Doudard, A. Galtier, F. Lefebvre, P. Lory, N. Malésys, D. Marquis, M. Poncelet, S. Roux, J. Rupil, D. Seyedi, J.-M. Stéphan, S. Taheri, L. Vincent, J.-F. Vittori, B. Weber et H. Yaacoub Agha. Qu'ils soient remerciés très chaleureusement.

Références bibliographiques

- [1] W. Weibull, *A statistical representation of fatigue failures in solids*, *Trans Roy Swed Inst Tech*, 27 (1949).
- [2] G. Lundberg, A. Palmgren, *Dynamic capacity of rolling bearings*, *Trans Roy Swed Inst Tech*, 196 (1947).
- [3] F. Bastenaire, *Étude statistique et physique de la dispersion des résistances et des durances à la fatigue*, thèse d'état, Université de Paris, 1960.
- [4] W. Weibull, *Fatigue testing and analysing of results*, Pergamon Press, Oxford (UK), 1961.
- [5] F. Hild, S. Roux, *Fatigue Initiation in Heterogeneous Brittle Materials*, *Mech Res Comm*, 18 (1991) 409-414.
- [6] A. de Bussac, J.C. Lautridou, *A probabilistic model for prediction of lcf surface crack initiation in pm alloys*, *Fat Fract Eng Mat Struct*, 16 (1993) 861-874.
- [7] A. de Bussac, *Prediction of the competition between surface and internal fatigue crack initiation in pm alloys*, *Fat Fract Eng Mat Struct*, 17 (1994) 1319-1325.
- [8] H. Yaacoub Agha, A.-S. Béranger, R. Billardon, F. Hild, *High Cycle Fatigue Behaviour of Spheroidal Graphite Cast Iron*, *Fat Fract Eng Mater Struct*, 21 (1998) 287-296.
- [9] I. Chantier, V. Bobet, R. Billardon, F. Hild, *A Probabilistic Approach to Predict the Very High-Cycle Fatigue Behaviour of Spheroidal Graphite Cast Iron*, *Fat Fract Eng Mater Struct*, 23 (2000) 173-180.
- [10] L. Flacelière, F. Morel, Y. Nadot, *Approche probabiliste en fatigue multiaxiale polycyclique : application aux défauts de fonderie*, in: *22e Journées de Printemps : Fatigue et procédés de fabrication, SF2M*, 2003.
- [11] E. Thieulot-Laure, S. Pommier, S. Fréchin, *A multiaxial fatigue failure criterion considering the effects of the defects*, *Int J Fat*, 29 (2007) 1996-2004.
- [12] D.G.S. Davies, *The Statistical Approach to Engineering Design in Ceramics*, *Proc Brit Ceram Soc*, 22 (1973) 429-452.
- [13] F. Hild, A.-S. Béranger, R. Billardon, *Fatigue Failure Maps of Heterogeneous Materials*, *Mech Mater*, 22 (1996) 11-21.
- [14] I. Chantier, V. Denier-Bobet, F. Hild, *A Lifting Procedure for Shot-Peened Cast Components Subjected to High Cycle Fatigue*, in: *ECF13, CD-ROM*, Elsevier, Oxford (UK), 2000, pp. (3C.127) 128 p.
- [15] F. Morel, L. Flacelière, *Data scatter in multiaxial fatigue: from the infinite to the finite fatigue life regime*, *Int J Fat*, 27 (2005) 1089-1101.
- [16] M.P. Luong, *Infrared thermography of fatigue in metals*, *SPIE*, 1682 (1992) 222-233.
- [17] M.P. Luong, *Fatigue limit evaluation of metals using an infrared thermographic technique*, *Mech Mat*, 28 (1998) 155-163.
- [18] J.-C. Krapez, D. Pacou, C. Bertin, *Application of lock-in thermography to a rapid evaluation of the fatigue limit in metals*, in: E. Grinzato et al. (Ed.) *5th AITA, Int Workshop on Advanced Infrared Techn and Appl, Venezia (Italy)*, 1999, pp. 379-385.
- [19] G. La Rosa, A. Risitano, *Thermographic methodology for rapid determination of the fatigue limit of materials and mechanical components*, *Int J Fat*, 22 (2000) 65-73.
- [20] C. Mabru, A. Chrysochoos, *Dissipation et couplages accompagnant la fatigue de matériaux métalliques*, in: Y. Berthaud, M. Cottron, J.-C. Dupré, F. Morestin, J.-J. Orteu, V. Valle (Eds.) *Photomécanique 2001, GAMAC*, 2001, pp. 375-382.
- [21] J.-C. Krapez, D. Pacou, *Thermography detection of early thermal effects during fatigue tests of steel and aluminum samples*, *AIP Conference Proceedings*, 615 (2002) 1545-1552.
- [22] A. Galtier, O. Bouaziz, A. Lambert, *Influence de la microstructure des aciers sur leurs propriétés mécaniques*, *Méc Ind*, 3 (2002) 457-462.
- [23] T. Boulanger, A. Chrysochoos, C. Mabru, A. Galtier, *Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels*, *Int J Fat*, 26 (2004) 221-229.
- [24] C. Doudard, S. Calloch, P. Cugy, A. Galtier, F. Hild, *A probabilistic two-scale model for high cycle fatigue life predictions*, *Fat Fract Eng Mat Struct*, 28 (2005) 279-288.

- [25] F.T. Pierce, *Tensile Tests for Cotton Yarns*, V. The 'Weakest Link' Theorems on the Strength of Long and of Composite Specimens, *J Text Inst*, 17 (1926) T355-T368.
- [26] A.M. Freudenthal, *Statistical Approach to Brittle Fracture*, in: H. Liebowitz (Ed.) *Fracture*, Academic Press, New York (USA), 1968, pp. 591-619.
- [27] Y. Nadot, N. Ranganathan, J. Mendez, A.-S. Béranger, *Study of natural cracks initiated on casting defects by crack front marking*, *Scripta Mat*, 37 (1997) 549-553.
- [28] Y. Murakami, T. Endo, *Effect of small defects on fatigue strength of metals*, *Int J Fat*, 2 (1980) 23-30.
- [29] Y. Murakami, S. Beretta, *Small Defects and Inhomogeneities in Fatigue Strength: Experiments, Models and Statistical Implications*, *Extremes*, 2 (1999) 123-147.
- [30] A. Nasr, Y. Nadot, C. Bouraoui, R. Fathallah, *Effect of Artificial Defect and Mean Shear Stress on Torsional Fatigue Behaviour*, *Appl Mech Mat*, 146 (2012) 74-82.
- [31] P. Clément, J.-P. Angeli, A. Pineau, *Short Crack Behavior in Nodular Cast Iron*, *Fatigue Eng Mater Struct*, 7 (1984) 251-265.
- [32] A. Wöhler, *Über die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl*, *Zeitschrift für Bauwesen*, 20 (1870) 73-106.
- [33] S. Suresh, *Fatigue of Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [34] K. Dang Van, A. Le Douaron, H.P. Lieurade, *Multiaxial Fatigue Limit: a New Approach*, in: S.R. Valluri, D.M.R. Taplin, P. Rama Rao, J.F. Knott, R. Dubey (Eds.) *ICF6*, Pergamon Press, Oxford (UK), New Delhi (India), 1984, pp. 1879-1885.
- [35] I.V. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, A. Bernasconi, *A comparative study of multiaxial loading*, *Int J Fat*, 19 (1997) 219-235.
- [36] J. Lemaitre, J.-P. Sermage, R. Desmorat, *A two scale damage concept applied to fatigue*, *Int J Fract*, 97 (1999) 67-81.
- [37] A. Bainvillet, T. Palin-Luc, S. Lasserre, *A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion*, *Int J Fat*, 25 (2003) 755-769.
- [38] M. Poncelet, C. Doudard, S. Calloch, B. Weber, F. Hild, *Probabilistic multiscale models and measurements of self-heating under multiaxial high cycle fatigue*, *J Mech Phys Solids*, 58 (2010) 578-593.
- [39] C. Mareau, *Modélisation micromécanique de l'échauffement et de la microplasticité des aciers sous sollicitations cycliques*, thèse de doctorat, ENSAM, 2007.
- [40] A. Ezanno, C. Doudard, S. Calloch, J.-L. Heuzé, *A new approach to characterizing and modeling the high cycle fatigue properties of cast materials based on self-heating measurements under cyclic loadings*, *Int J Fat*, 47 (2013) 232-243.
- [41] C. Peyrac, T. Jollivet, N. Leray, F. Lefebvre, O. Westphal, L. Gornet, *Self-heating Method for Fatigue Limit Determination on Thermoplastic Composites*, *Proc Eng*, 133 (2015) 129-135.
- [42] C. Doudard, M. Poncelet, S. Calloch, C. Boué, F. Hild, A. Galtier, *Determination of an HCF criterion by thermal measurements under biaxial cyclic loading*, *Int J Fat*, 29 (2007) 748-757.
- [43] C. Atwood, V. Shah, W. Galyen, *Analysis of pressurized water reactor primary coolant leak events caused by thermal fatigue*, in: *European Safety and Reliability Conference*, 1999.
- [44] M. Cipièrre, O. Goltrant, *Circuit RRA N4 - incident de Civaux endommagement par fatigue thermique des tuyauteries situées dans des zones de mélange*, in: *International Symposium on Contribution of Materials Investigations to the Resolution of Problems Encountered in Pressurized Water Reactors*, 2002.
- [45] V. Maillot, *Initiation and growth of thermal fatigue crack networks in an AISI 304 L type austenitic stainless steel (X2 CrNi18-09)*, thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologie de Lille, 2003.
- [46] C. Déprés, *Modélisation physique des stades précurseurs de l'endommagement en fatigue dans l'acier inoxydable austénitique 316L*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [47] S. Osterstock, *Vers la prédiction de l'apparition de réseaux de fissures : influence des paramètres microstructuraux sur la dispersion à l'amorçage*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2008.
- [48] M. Seyedi, S. Taheri, F. Hild, *Numerical modeling of crack propagation and shielding effects in a striping network*, *Nucl Eng Design*, 236 (2006) 954-964.
- [49] N. Malésys, L. Vincent, F. Hild, *A probabilistic model to predict the formation and propagation of crack networks in thermal fatigue*, *Int J Fat*, 31 (2009) 565-574.
- [50] J. Rupil, *Multifissuration en fatigue uniaxiale et biaxiale de l'acier inoxydable 304L*, thèse de doctorat, ENS Cachan, 2012.
- [51] N. Malésys, M. Seyedi, L. Vincent, F. Hild, *On the formation of crack networks in high cycle fatigue*, *C R Mécanique*, 334 (2006) 419-424.
- [52] J. Rupil, L. Vincent, F. Hild, S. Roux, *Identification and Probabilistic modeling of mesocrack initiations in 304L stainless steel*, *Int J Multiscale Comput Eng*, 9 (2011) 445-458.

- [53] C. Denoual, G. Barbier, F. Hild, *A Probabilistic Approach for Fragmentation of Ceramics under Impact Loading*, *C R Acad Sci Paris*, 325 (1997) 685-691.
- [54] C. Denoual, F. Hild, *Dynamic Fragmentation of Brittle Solids: A Multi-Scale Model*, *Eur J Mech A/Solids*, 21 (2002) 105-120.
- [55] P. Boutet, F. Hild, F. Lefebvre, *Probabilistic Prediction of Fatigue Life of Cracked Parts: Linear Elastic Fracture Mechanics based Approach*, *Proc Eng*, 66 (2013) 343-353.
- [56] P. Boutet, *Prise en compte des méconnaissances dans la quantification de la nocivité des fissures en fatigue*, thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2015.