

Introduction au dimensionnement en fatigue des structures sous chargements complexes

T. Palin-Luc

Arts et Métiers ParisTech, I2M, CNRS, Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence Cedex,
email : thierry.palin-luc@ensam.eu

Résumé

Ce cours présente les bases des méthodes de dimensionnement en fatigue des structures métalliques sous chargements multiaxiaux. Après avoir expliqué le principe d'un critère de fatigue multiaxiale et les grandes familles associées (invariants, plan critique, énergétique) quelques critères de la littérature sont présentés. Le passage du matériau (éprouvette de laboratoire) à la structure est ensuite abordé en insistant sur la nécessité de prendre en compte l'hétérogénéité du champ de contraintes dans le dimensionnement pour tenir compte des effets des accidents de géométrie et des types de chargement. Les différentes familles de méthodes non locales sont décrites (distance critique, moyenne sur une ligne ou une surface, gradient, DSG, volume d'influence). Enfin, le principe du calcul de durée de vie en fatigue sous chargements d'amplitude variable est brièvement abordé.

Mots clés : fatigue multiaxiale ; critère ; calcul de durée de vie ; amplitude constante ; amplitude variable ; approche locale ; approche non locale.

1. Introduction

Pour éviter l'amorçage de fissures pouvant conduire à la rupture des pièces et des structures soumises à des chargements cycliques d'amplitude constante ou variable il est indispensable d'utiliser des méthodes de dimensionnement pertinentes. Ce cours présente les bases de ces méthodes : critères de résistance et méthodes de calcul de durée de vie en fatigue à grande durée de vie. Après avoir présenté le principe d'un critère de fatigue multiaxiale et les grandes familles associées (invariants, plan critique, énergie) quelques critères de la littérature sont décrits. Le passage du matériau (éprouvette de laboratoire) à une pièce ou structure réelle est ensuite abordé avec la nécessité de prendre en compte l'hétérogénéité du champ de contraintes dans le dimensionnement pour tenir compte des effets des accidents de géométrie et des types de chargement avec des méthodes non locales. Dans la réalité la majorité des pièces et structures est soumise à des chargements non sinusoïdaux ; on parle de chargement d'amplitude variable. Le calcul de durée de vie en fatigue multiaxiale sous de tels chargements est donc ensuite abordé en insistant sur l'ensemble de la méthodologie de calcul de durée de vie. La fin du cours s'ouvre vers les méthodes incrémentales, plus récentes, et montre leur intérêt ; notamment pour s'affranchir des méthodes de comptage de cycles souvent choisies a priori.

2. Dimensionnement en fatigue multiaxiale d'amplitude constante

2.1 Notion de critère de fatigue multiaxiale

Un critère de fatigue est une équation mathématique (1) définissant un domaine de survie (ou plus exactement de non amorçage de fissure) sous un chargement périodique d'amplitude constante (généralement supposé sinusoïdal) pour un grand nombre de cycles donné (typiquement 10^6 ou 10^7 cycles) et une probabilité de survie, P_s , fixée. Ce formalisme doit être représentatif des mécanismes d'amorçage de fissure du matériau dans le domaine de durée de vie considéré. Ce point est particulièrement important car le concept de critère est intimement lié au concept de limite de fatigue ou de durée de vie supposé infinie (asymptote horizontale de la courbe S-N). Si la limite de fatigue est généralement définie selon l'ASTM pour une durée de vie entre 10^6 et 10^7 cycles [1] on sait depuis plus d'une vingtaine d'année que des fissures peuvent apparaître bien au-delà de ces durées de vie même sous des niveaux de contraintes inférieurs à cette "limite de fatigue" [2]. Cependant les mécanismes d'endommagement ne sont pas encore bien compris, aucun critère de fatigue n'existe pour le domaine gigacyclique (10^8 cycles et au-delà). Nous nous limiterons donc ici à la fatigue à grande durée de vie (10^6 à 10^7 cycles).

Ce document traite des alliages métalliques mais le principe énoncé ci-après peut être généralisé à d'autres familles de matériaux, notamment les composites. Un critère est une équation mathématique (1) permettant de définir un domaine de sécurité (ou de survie) vis-à-vis de l'amorçage d'une fissure de fatigue avec une probabilité donnée (généralement 50%) pour un matériau donné soumis à un chargement cyclique d'amplitude constante durant un grand nombre de cycles fixé (10^7 par exemple) [3]. Un critère s'applique en chaque point M d'une pièce ; on parle alors de critère ponctuel, par opposition aux approches non locales (abordées plus loin) développées pour tenir compte de l'effet des gradients de contraintes sur la résistance en fatigue. Il existe plus d'une cinquantaine de critères dans la littérature ; la grande majorité utilise des variables dépendant du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}(M,t)$ et ou du tenseur des déformations $\underline{\underline{E}}(M,t)$ et éventuellement de variables complémentaires notées ici V_j .

$$f(\underline{\underline{\Sigma}}(M,t); \underline{\underline{E}}(M,t); V_j; P_s) \leq 0 \quad (1)$$

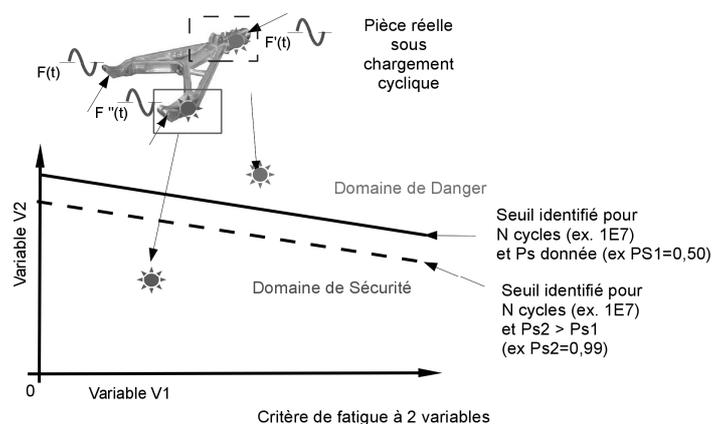


Figure 1. Principe d'un critère de fatigue à deux variables. Chaque point de la pièce étudiée a pour image un point dans l'espace du critère (dans le domaine de sécurité ou non).

La section suivante présente une classification des critères de fatigue et en détaille quelques-uns des plus connus. Avant cela il convient de souligner un point important concernant le comportement

mécanique cyclique du matériau. En effet, le concept de critère de fatigue suppose qu'au voisinage du point considéré le matériau soit dans un état de contraintes et de déformations stabilisé afin de pouvoir appliquer un critère en considérant uniquement des variables calculées sur un seul cycle de chargement. Cette condition de stabilisation du comportement est indispensable. En effet si les tenseurs des contraintes et des déformations évoluent à cause du durcissement ou de l'adoucissement cyclique du matériau, on ne peut alors savoir sur quel cycle appliquer l'équation (1).

2.2 Différentes familles de critères

Les différents critères de fatigue de la littérature peuvent être classés en trois grandes familles : (i) de type Von Mises (ou basés sur des invariants), (ii) de type plan critique ou (iii) énergétique.

2.2.1 Critères basés sur des invariants ou de type Von Mises

Parmi les plus connus, on retrouve dans cette catégorie les critères de Sines [4] et de Crossland [5]. Ce dernier utilise une combinaison linéaire de la contrainte hydrostatique maximale sur un cycle et l'amplitude du deuxième invariant du déviateur des contraintes :

$$\sqrt{J_{2,a}} + \alpha \sigma_{H,\max} \leq \beta \quad (2)$$

où $\sqrt{J_{2,a}} = \max_{t \in T} \| \underline{S}(t) - \underline{S}_m \| = \max_{t \in T} \sqrt{\frac{1}{2} [\underline{S}(t) - \underline{S}_m] : [\underline{S}(t) - \underline{S}_m]}$ est le rayon de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace du déviateur, \underline{S}_m désignant le centre de cette hypersphère obtenu par l'équation : $\underline{S}_m : \min_{\underline{S}'} \left\{ \max_{t \in T} \| \underline{S}(t) - \underline{S}' \| \right\}$ Les constantes α et

β peuvent être identifiées à l'aide de deux limites d'endurance : en torsion, σ_{D-1}^{to} , et en flexion, σ_{D-1}^f , alternées symétriques sur éprouvettes lisses (sans entaille) pour une probabilité de survie données (généralement 0,5 si rien n'est précisé) :

$$\alpha = \left(\sigma_{D-1}^{to} - \frac{\sigma_{D-1}^f}{\sqrt{3}} \right) / \left(\frac{\sigma_{D-1}^f}{3} \right) \quad \text{et} \quad \beta = \sigma_{D-1}^{to} \quad (3)$$

Ce critère reflète bien l'influence d'une cission moyenne et d'une contrainte normale moyenne sur les limites d'endurance. Notons aussi que pour conserver l'effet bénéfique d'une contrainte hydrostatique négative, la constante α doit rester strictement positive ce qui conduit à la condition : $\sigma_{D-1}^f / \sigma_{D-1}^{to} \leq \sqrt{3}$, qui peut ne pas être respectée sur certains alliages, ce critère est alors inapplicable.

2.2.2 Critères de type plan critique

Afin de traduire le caractère orienté de l'amorçage des microfissures de fatigue (tel qu'observé expérimentalement) et de leur propagation en stade I (cisaillement), plusieurs auteurs en ont conclu que le paramètre mécanique qui gouverne l'amorçage d'une fissure est la contrainte de cisaillement. Comme la contrainte normale, $N(\varphi, \theta)$, au plan de cisaillement (repéré par sa normale unitaire $\underline{n}(\varphi, \theta)$), a aussi une influence importante sur l'amorçage il paraît naturel de choisir comme paramètre gouvernant l'endommagement en fatigue une combinaison des contraintes normale et de cisaillement agissant sur un même plan. Plusieurs critères, dits de type plan critiques, ont ainsi été proposés, citons par exemples : Findley [6], Matake [7], Mc Diarmid [8].

À titre d'exemple le critère proposé par Matake [7] est une combinaison linéaire (sur le plan matériel subissant la plus grande amplitude de cisaillement) de l'amplitude de la contrainte de cisaillement, C_a , et de la valeur maximale sur un cycle de la contrainte normale à ce plan, N_{\max} (4). Comme pour

Crossland, les constantes a et b peuvent être déterminées d'après deux limites de fatigue sur éprouvettes lisses en torsion et flexion alternées symétriques par exemple.

$$C_a(\varphi^*, \theta^*) + a N_{\max}(\varphi^*, \theta^*) \leq b \quad \text{où} \quad (\varphi^*, \theta^*) : \max_{(\varphi, \theta)} \{C_a(\varphi, \theta)\} \quad (4)$$

Les approches précédentes se placent à l'échelle macroscopique usuelle de l'ingénieur ; elles ne tiennent pas compte du caractère polycristallin des métaux. Le premier critère de fatigue raisonnant à l'échelle des grains, dite échelle mésoscopique, a été proposée par Dang Van en 1973 [12]. Compte-tenu de la longueur limitée de ce document, seule une brève présentation en est faite ci-après ; le lecteur souhaitant approfondir pourra se reporter aux références [12, 13, 14].

L'élément de volume élémentaire macroscopique du matériau est vu comme un volume constitué de différents grains dont les orientations cristallines sont réparties aléatoirement de façon équiprobable. Pour éviter l'amorçage de fissure dans les grains défavorablement orientés, Dang Van a proposé un critère de non plastification de ces grains. Il utilise une combinaison linéaire, dans l'état adapté, de la cission mésoscopique, $\hat{\tau}$, et de la contrainte hydrostatique, $\hat{\sigma}_H$: $\max_{t \in T} [\hat{\tau}(t) + \alpha \hat{\sigma}_H(t)] \leq \beta$, où α et β sont des constantes du matériau. Le trajet de $\hat{\tau}(t)$ peut être déterminé pour tout plan de normale unitaire \underline{n} . Le critère de fatigue multiaxiale de Dang Van peut donc s'écrire sous la forme de l'équation (5) à l'échelle mésoscopique. Appliquer ce critère nécessite donc la recherche, en chaque point de la pièce, d'un double maximum (par rapport à \underline{n} et t).

$$\max_{\underline{n}} \left\{ \max_t [\|\hat{\tau}(\underline{n}, t)\| + \alpha \sigma_H(t)] \right\} \leq \beta \quad (5)$$

Compte-tenu du critère de plasticité du cristal, on peut évaluer l'état de contraintes dans l'état adapté pour estimer $\hat{\tau}$ et $\hat{\sigma}_H$ en fonction des contraintes macroscopiques $\underline{\Sigma}(t)$. En supposant qu'en fatigue à grande durée de vie, le matériau s'adapte élastiquement à toutes les échelles (macro et méso) et en utilisant le théorème de Melan, Dang Van détermine le cycle de contrainte stabilisé $\underline{\hat{\sigma}}(t)$ à l'échelle mésoscopique en fonction du tenseur des contraintes macroscopiques $\underline{\Sigma}(t)$. D'après ce théorème, il existe pour des temps suffisamment grands $t > t_1$, un champ d'autocontrainte $\underline{\rho}^*$ indépendant du temps tel que $\underline{\hat{\sigma}}(t)$ est donné par $\underline{\hat{\sigma}}(t) = \underline{\underline{A}} : \underline{\Sigma}(t) + \underline{\rho}^*$. En fatigue à grande durée de vie, la plasticité cyclique étant très limitée et circonscrite à quelques grains, le ou les quelques grains plastifiés sont considérés comme une inclusion élastoplastique noyée dans une matrice restant élastique. Ainsi, en utilisant le modèle de Lin-Taylor, on montre que le tenseur de localisation $\underline{\underline{A}}$ est égal à l'unité. En supposant que les propriétés élastiques sont les mêmes aux deux échelles on montre enfin que la contrainte hydrostatique est aussi la même aux deux échelles (méso et macro). Dang Van choisit de construire la cission résiduelle $\underline{\tau}^* = \underline{\rho}^* \cdot \underline{n}$ sur chaque plan de normale \underline{n} en supposant que dans ce plan le critère de plasticité dans l'état adapté est un cercle centré à l'origine, de rayon τ_y^* , égal au rayon du plus petit cercle circonscrit à la courbe décrite par l'extrémité du vecteur cisaillement macroscopique $\underline{C}(\underline{n}, t)$. $\underline{\tau}^*$ est donc le vecteur position du centre du cercle circonscrit précédent. $\|\hat{\tau}(\underline{n}, t)\|$ est le rayon de ce cercle ce qui permet d'appliquer ce critère d'après les grandeurs macroscopiques. Notons que cette approche « méso-macro » a donné lieu à plusieurs évolutions, en particulier les critères de Papadopoulos [15, 16] et Morel [17, 18].

2.2.3 Critères énergétiques

Plusieurs critères énergétiques ont été proposés dans la littérature (Ellyin, Glinka, Garud, Macha, etc.) mais leur présentation ici n'est pas possible compte-tenu de la longueur limitée de ce document. Une synthèse intéressante est proposée dans [19]. Généralement ces critères sont : soit globaux (ils considèrent alors des énergies de déformation élastique et / ou plastique, sphériques et/ou déviatorique) ; soit de type plan critique. C'est par exemple le cas de Glinka [20] qui calcule l'énergie de déformation endommageante sur le plan supportant le plus grand glissement par : $W^* = (\Delta\sigma/2)(\Delta\varepsilon/2) + (\Delta\tau/2)(\Delta\gamma/2)$ où $\Delta\varepsilon/2$ et $\Delta\sigma/2$ sont respectivement l'amplitude de déformation normale et l'amplitude de contrainte normale au plan critique ; $\Delta\gamma/2$ et $\Delta\tau/2$ sont respectivement les amplitudes du glissement et du cisaillement sur ce même plan. La valeur seuil de W^* pour une durée de vie donnée est identifié expérimentalement, par exemple en traction. Une variante a été proposée pour tenir compte de l'effet d'une contrainte normale moyenne [21].

2.3 Critères de fatigue non locaux

On sait depuis longtemps que la résistance en fatigue dépend des gradients de contraintes et de déformations au voisinage des points où les fissures s'amorcent. L'effet sur la tenue en fatigue des entailles ou accidents de géométrie en est une illustration qu'il faut prendre en compte pour concevoir des pièces fiables et ainsi transposer les données de laboratoire obtenues sur éprouvettes à des pièces présentant des accidents de géométrie. C'est aussi pour cela que – toutes choses égales par ailleurs – les limites de fatigues sur éprouvettes lisses sont différentes en traction, flexion rotative et flexion plane [22]. Or les approches précédentes considèrent toutes comme données d'entrée les tenseurs des contraintes et/ou des déformations en chaque point de la pièce étudiée, on parle alors de méthodes locales. Elles ne peuvent donc tenir compte des effets de gradients ou de volume sollicité. Aussi, par opposition aux approches locales, des méthodes non-locales tenant compte de la répartition des champs de contraintes et/ou de déformations au voisinage de chaque point considéré ont été développées.

Les critères de fatigues non-locaux peuvent être classés en deux grandes familles : ceux consistant à (i) moyenniser des critères ponctuels et ceux utilisant (ii) le gradient mathématique d'une quantité souvent homogène à une contrainte. Dans la première catégorie on retrouve les approches de type distance critique [23, 24] dont le principe est d'appliquer un critère ponctuel non pas au point chaud où la contrainte équivalente, par exemple celle de Crossland, $\sigma_{eq,Cr}(M) = \sqrt{J_{2,a}(M)} + \alpha \sigma_{H,max}(M)$, est maximale, mais à une certaine distance supposée caractéristique de la microstructure du matériau considéré. On peut alors parler d'approche 0D (ou de moyenne sur une distance nulle) par extension de ce qui suit. D'autres approches consistent en effet à considérer comme paramètre d'endommagement la moyenne d'une contrainte équivalente sur un segment de longueur donnée (on peut alors parler de moyenne 1D) ; comme proposé par Taylor [24] puis par Susmel [40]. Enfin, le même concept a été proposé en 3 dimensions (approches 3D) notamment par Sonsino et al. [25] (approche V90%) et par Palin-Luc et al. [26, 27], puis Morel et Palin-Luc [28]. Sonsino considère comme volume de moyennisation, noté V90%, le volume autour de chaque point les plus sollicités au sens de la contrainte équivalente de Von Mises, contenant les points supportant au moins 90% du maximum local de la contrainte équivalente de Von Mises. Il s'agit donc d'un volume défini a priori. Par contre dans l'approche proposée par Palin-Luc et al. [26,27] le volume V^* , influençant l'amorçage des fissures de fatigue, est défini comme l'ensemble des points autour du point le plus sollicité (au sens du travail de déformation fourni à la pièce) où le travail de déformation est supérieur à un seuil propre à chaque matériau. Ce concept a également été utilisé avec une approche en contrainte par Morel et Palin-Luc en 2002 [28].

Dans la seconde catégorie, celle des approches utilisant l'expression mathématique du gradient des contraintes, on trouve des méthodes 1D ou 3D. Dans les approches 1D « la méthode du gradient » proposée par le CETIM [29] dans laquelle la limite de fatigue dépend du gradient relatif $\chi = (1/\sigma)(d\sigma/dx)$ à fond d'entaille où σ est la contrainte principale à fond d'entaille et x la direction s'enfonçant dans la matière depuis le fond d'entaille. Pour la prise en compte des gradients dus aux défauts (porosités, entailles, etc.) sur la résistance en fatigue des métaux notons les travaux de Nadot et al. [30] avec l'approche DSG (Directive Stress Gradient) dans laquelle la contrainte équivalente de Crossland est combinée linéairement avec le gradient de cette contrainte sur une distance égale à la racine carrée de l'aire du défaut au sens de Murakami.

$$\sigma_{eq,Cr}(A) - \gamma \times G(\sigma_{eq,Cr}) \leq b \text{ où } G(\sigma_{eq,Cr}) = (\sigma_{eq,Cr}(A) - \sigma_{eq,Cr}(B)) / \sqrt{\text{aire du défaut}} \quad (6)$$

A désigne le point au fond du défaut et B est un point situé en profondeur dans la pièce à une distance AB égale à la racine carrée de l'aire du défaut.

Enfin citons l'approche de Papadopoulos et Panoskaltsis (1996) [31] utilisant une version modifiée du critère de Crossland en tenant compte du gradient tridimensionnel de la contrainte hydrostatique :

$$\sqrt{J_{2,a}(M)} + \alpha \sigma_{H,max}(M) \left\{ 1 - \beta \times \langle G(\sigma_{H,max}(M)) / \sigma_{H,max}(M) \rangle \right\} \leq b \quad (7)$$

avec $G(\sigma_{H,max}) = \sqrt{(\partial\sigma_{H,max}/\partial x)^2 + (\partial\sigma_{H,max}/\partial y)^2 + (\partial\sigma_{H,max}/\partial z)^2}$.

3. Calcul de durée de vie sous chargements d'amplitude variable

Lorsque le chargement n'est plus d'amplitude constante mais d'amplitude variable (par bloc ou bien de façon pseudo-aléatoire) les critères de fatigue ne sont pas applicables ; il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes de calcul de durée de vie. Ces dernières reposent généralement sur les éléments suivants : (i) une méthode de comptage de cycles ; (ii) un critère de fatigue ; (iii) une loi (ou règle) de cumul d'endommagement ; (iv) une courbe de Wöhler (ou courbe S-N).

Les méthodes de comptage, dont la plus connue est celle de la goutte d'eau ou « Rainflow » [32], permettent de décomposer l'évolution "aléatoire" d'un chargement en une succession de différents cycles sinusoïdaux d'amplitude et de valeur moyenne qui leurs sont propres. Il s'agit de méthodes valables principalement pour des chargements uniaxiaux. Les méthodes de comptage de cycles pour des états de contrainte multiaxiaux sont peu nombreuses et encore sujettes à travaux de recherche [33]. On se ramène donc souvent à un comptage de cycles sur une quantité uniaxiale (contrainte équivalente par ex) ; toute la question est alors de savoir si la variable utilisée pour le comptage est bien pertinente.

À la fin du comptage, on peut calculer l'endommagement généré par chaque cycle i (d'amplitude $\sigma_{\alpha,i}$ et de moyenne $\sigma_{m,i}$). Pour cela, il est nécessaire d'utiliser une règle de cumul d'endommagement. Il en existe un grand nombre dans la littérature en particulier pour tenir compte de la non linéarité du cumul de l'endommagement lorsque des cycles de faibles amplitudes (dans le domaine des grandes durées de vie) sont mélangés à des cycles de grande amplitude (régime de fatigue oligocyclique). Le lecteur souhaitant plus de détails pourra se reporter à la réf. [34]. Pour illustrer le principe et à titre d'illustration, la méthode la plus simple est celle de Miner [35]. Son application suppose que l'on connaisse par chaque couple $(\sigma_{\alpha,i}, \sigma_{m,i})$ la durée de vie associée, $N_{f,i}$, sur la courbe de Wöhler correspondante. L'endommagement généré par chaque cycle est alors $d_i = 1/N_{f,i}$ où $N_{f,i}$ désigne la durée de vie sous chaque cycle d'amplitude constante. La fissure est supposée s'amorcer quand $\sum_i d_i = 1$. Comme toutes les courbes de Wöhler ne sont pas connues, un critère de fatigue permet de faire une correction de contrainte moyenne. Pour chaque cycle à contrainte moyenne non nulle, un cycle alterné symétrique équivalent (au sens du critère choisi) est calculé.

Historiquement les méthodes de calcul de durée de vie utilisaient des méthodes de comptages des cycles pour reconnaître des cycles dans les signaux réels d'amplitude variable (tels que les déformations enregistrées en service sur des pièces réelles instrumentées). Ces méthodes ont été très utilisées au 20^{ème} siècle car pendant très longtemps les moyens d'essais n'étaient capables que d'appliquer aux éprouvettes ou pièces des chargements sinusoïdaux variables par blocs [36, 37]. Les ingénieurs et chercheurs avaient donc besoin de ces méthodes de comptage de cycles pour reproduire sur banc d'essais des signaux réels. Avec les progrès des asservissements et des moyens informatiques, il est possible depuis une trentaine d'années de reproduire sur machine ou banc d'essais des signaux réels enregistrés en service. Les méthodes de calcul de durée de vie ont donc aussi évoluées pour passer de méthodes utilisant des comptages de cycles à des méthodes incrémentales [34].

Certaines méthodes de calcul de durée de vie s'affranchissent de toute technique de comptage de cycles. Leur principe est de suivre au cours du temps l'évolution d'une variable d'endommagement (notons-la X). Son évolution cumulée entre le début du chargement ($t = 0$) et l'instant t courant est donné par : $Xc(t) = \int_{t=0}^t dx(t)$. Cette variable peut, par exemple, être une variable d'endommagement [41], la déformation plastique mésoscopique comme dans les méthodes de Papadopoulos [15] ou de Morel [38] ou la densité volumique du travail de déformation fourni endommageant [39].

4. Conclusion

Les bases des méthodes de calcul de résistance (critère) en fatigue multiaxiale et de calcul de durée de vie (méthodes de cumul d'endommagement) ont été présentées. Les approches non locales permettant de tenir compte de l'effet des gradients de contraintes ont également été abordées. Il convient de souligner le rôle fondamental joué par les modèles de comportement mécanique cyclique utilisés dans le calcul des champs de contraintes et de déformations en amont de ces méthodes de calcul en fatigue.

Références

- [1] B. Broadman, ASM Handbook, Volume 1: Properties and Selection: Irons, Steels, and High-Performance Alloys, 1990, ASM International, pp. 673-688.
- [2] C. Bathias, 1999, There is no infinite fatigue life in metallic materials, *Fat. Fract. Engng. Mat. Struct.* Volume 22, Issue 7, pp. 559–565.
- [3] T. Delahay (2004) Développement d'une méthode probabiliste de calcul en fatigue multiaxiale prenant en compte les gradients de contraintes, thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I.
- [4] G. Sines, "Behavior of metals under complex static and alternating stresses", in *Metal Fatigue*, Sines G. and Waisman J.L. Editors, Mc Graw Hill, 1959.
- [5] B. Crossland, "Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel", *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals*, Institution of Mechanical Engineers, London, 1956, pp. 138-149.
- [6] W.N. Findley, "A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending", *Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B*, Vol. 81, 1959.
- [7] T. Mataka, "An explanation on fatigue limit under combined stress", *Bulletin fo the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 2, N°1, 1980.
- [8] D.L. McDiarmid, *Fatigue and fracture of engineering materials and structures*, Vol. 17, 1994.
- [12] K. Dang Van, "Sur la résistance à la fatigue des métaux", *Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'Artillerie française*, 3^{ème} fascicule., 1973.
- [13] K. Dang Van, I.V. Papadopoulos, B. Griveau, O. Message, "Sur le calcul des structures soumises à la fatigue multiaxiale", *Matériaux et Structures*, Hermès éditeur, Paris, 1987.

- [14] K. Dang Van, I. V. Papadopoulos "High-cycle metal fatigue – From theory to applications", Courses and Lectures of CISM, N°392, Springer-Verlag Wien, New-York, 1999.
- [15] I.V. Papadopoulos, "Fatigue polycyclique des métaux : Une nouvelle approche", thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987.
- [16] I.V. Papadopoulos, « A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals », *Int. J. Fatigue*, vol. 16, n°6, p. 377-384, 1994.
- [17] F. Morel, "Fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude variable" thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 1996.
- [18] F. Morel, "A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading", *Int. J. Fatigue*, vol. 22, p. 101-119, 2000.
- [19] E. Macha and C.M. Sonsino. Energy criteria of multiaxial fatigue failure. *Fat. Fract. Engng. Mater. Struct.*, 22 :1053–1070, 1999.
- [20] G. Glinka, G. Shen, and A. Plumtree. A multiaxial fatigue strain energy density parameter related to the critical fracture plane. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 18(1) :37–46, 1995.
- [21] G Glinka, G. Wang, and A. Plumtree. Mean stress effects in multiaxial fatigue. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 18 :755–764, 1995.
- [22] A. Brand, J. F. Flavenot, R. Grégoire, C. Tournier, "Recueil de données technologiques sur la fatigue", CETIM, 1980
- [23] J.F. Flavenot, N. Skally, (1983) *Rev. Mécanique Matériaux et Electricité*, pp. 15–25
- [24] D. Taylor (2000) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *Int. J. Fatigue* 21, 413–420.
- [25] Sonsino, C., Kaufmann, H., Grubisic, V., 1997. Transferability of material data for the example of a randomly loaded truck stub axle. *SAE Tech. Paper Series*, 1–22.
- [26] T. Palin-Luc and S. Lasserre (1998) An energy based criterion for high cycle multiaxial fatigue. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 17, n°2, pp. 237-251.
- [27]. A. Banvillet, T. Palin-Luc and S. Lasserre (2003) A volumetric energy based high cycle multiaxial fatigue criterion. *Int. Journal of Fatigue*, Vol. 25, pp. 755-769
- [28] F. Morel and T. Palin-Luc, A non-local theory applied to high cycle multiaxial fatigue. *Fat. Fract. Engng Mat. Struct.*, vol. 25, pp. 649-665, 2002
- [29] A. Brand (2005) Calcul des pièces à la fatigue : méthode du gradient, CETIM.
- [30] Y. Nadot and Billaudeau T. Multiaxial fatigue limit criterion for defective materials, *Engng. Frac. Mech.*, 73 (1), pp. 112-133, 2006
- [31] I.V. Papadopoulos and V. Panoskaltis (1996) Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. *Engng. Fract. Mech.*, 55, 513–528.
- [32] AFNOR, Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable. Méthode Rainflow de comptage. NF A 03-406, p. 1-32, 1993.
- [33] K. Dressler, R. Carmine, R. Krüger, "The multiaxial rainflow method", Riek., Ed., *Low cycle fatigue and elasto-plastic behaviour of materials 3*, Elsevier, p. 325-330, 1992.
- [34] C. Bathias et A. Pineau, *La Fatigue des matériaux et des structures*, Tome 4, Hermès, 2009
- [35] M. Miner, (1945) Cumulative damage in fatigue. *J. of Applied Mechanics*, September, 159–164.
- [36] Gassner E., "Fatigue resistance of various materials under random loading", 9th ICAF symposium LBF - TR - 136, pageS.3.5/1.34, 1977.
- [37] Grégoire R., *La fatigue sous charge programmée*, Note technique n°20, CETIM, 1981.
- [38] F. Morel, A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading, *Int. J. Fatigue*, vol. 22, p. 101-119, 2000.
- [39] N. Saintier, T. Palin-Luc, J. Bénabes and F. Cochetoux (2013) Non local energy based fatigue life calculation method under multiaxial variable amplitude loadings. *Int. J. Fat.*, vol. 54, pp. 68-83.
- [40] L. Susmel (2008) The theory of critical distances: a review of its applications in fatigue, *Engng Fracture Mechanics*, 75 (7), pp. 1706-1724
- [41] J.L. Chaboche, Une loi différentielle d'endommagement en fatigue avec cumulation non-linéaire, *Revue Française de Mécanique*, vol. 50-51, p.71-82, 1974.