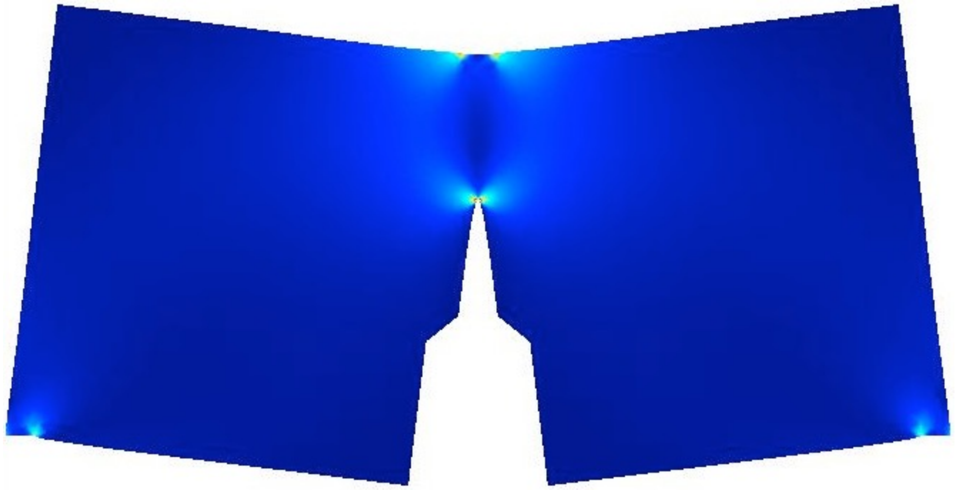
Cours sur la Mécanique de la Rupture



Jean-Jacques Marigo

Mécanique de la rupture

- but

modéliser l'évolution de la fissuration des objets depuis l'initiation jusqu'à la rupture sous l'effet de chargements thermo-mécaniques

- classification :
  - rupture fragile : élasticité + fissures (béton, roche, céramiques, ...)
  - rupture ductile : élasto-plasticité + fissures (métaux)
  - fatigue : chargement cyclique + fissures (tous matériaux)

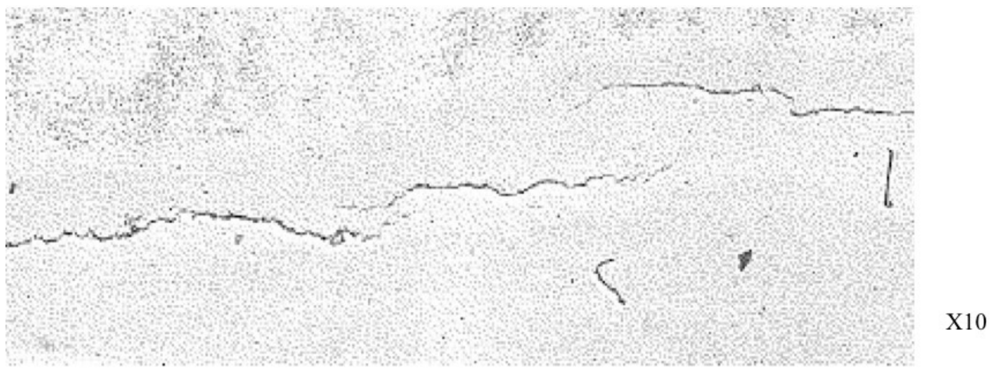
Les bases de la rupture fragile

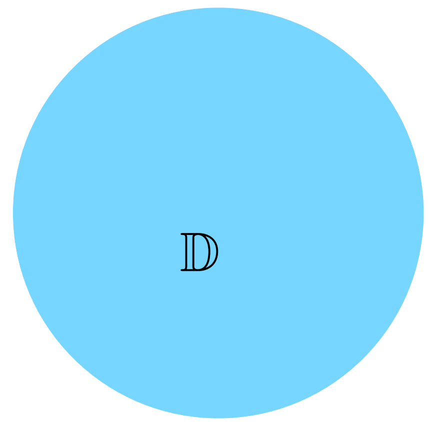
- La modélisation des fissures
- Les singularités en pointe de fissure
- Les grandeurs énergétiques

description géométrique des fissures

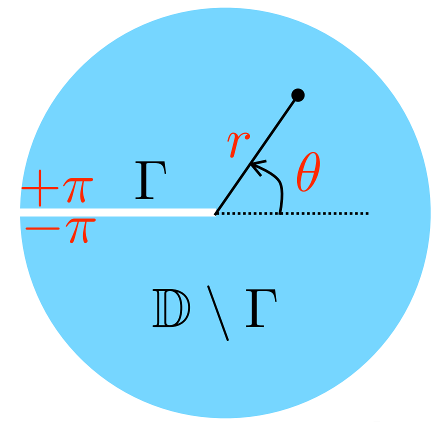
- **Fissure = coupure dans la configuration de référence**

on enlève des points matériels sur une surface (en 3D) ou sur une courbe (en 2D)



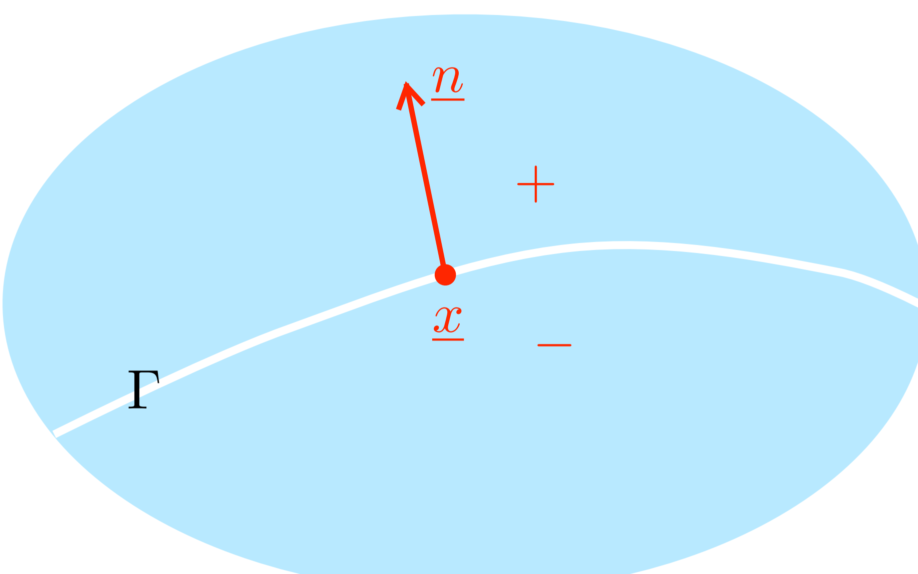


objet sain



objet fissuré

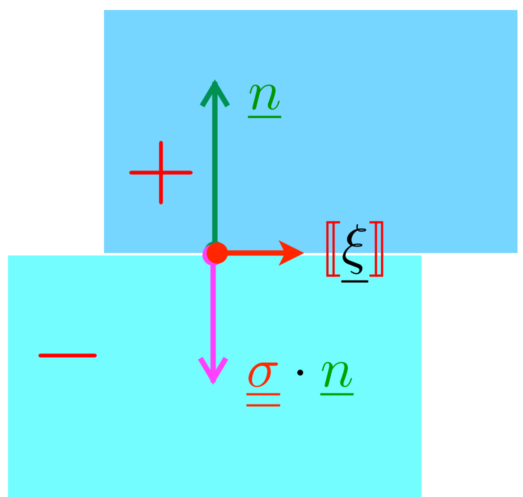
- **Orientation des fissures**



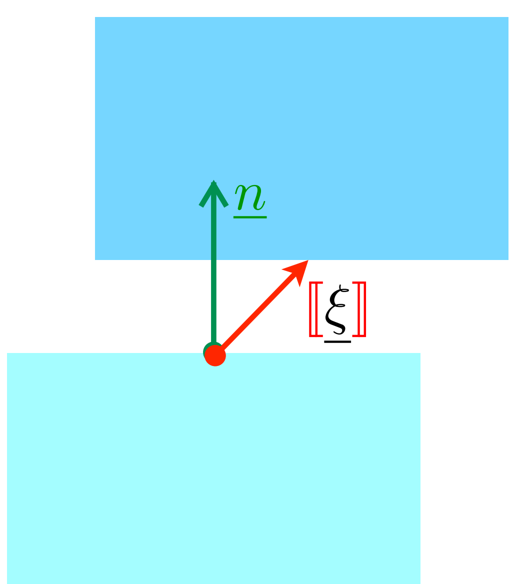
- choix d'une normale
- définition du côté + et du côté -
- saut de déplacement

$$\boxed{[\![\underline{\xi}]\!] = \underline{\xi}^{+} - \underline{\xi}^{-}}$$

conditions aux limites sur les lèvres des fissures



fissure fermée “lisse”



fissure ouverte “libre”

condition cinématique de non interpénétration

- normale à la configuration de référence
- saut normal de déplacement non négatif

  1. Fissure ouverte : $\boxed{[\![\underline{\xi}]\!] \cdot \underline{n} > 0}$
  2. Fissure fermée ou en contact : $\boxed{[\![\underline{\xi}]\!] \cdot \underline{n} = 0}$

condition sur les contraintes

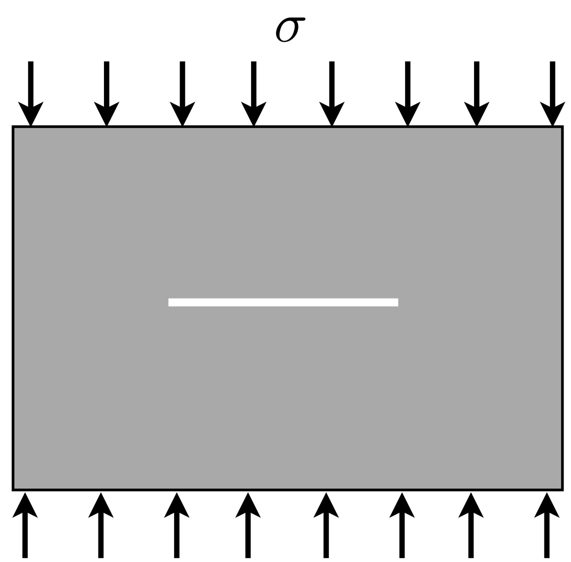
- en l’absence de frottement, pas de cisaillement

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma_{nn} \underline{n}}$$

- contrainte normale non positive

  1. Fissure ouverte : $\boxed{\sigma_{nn} = 0}$
  2. Fissure fermée ou en contact : $\boxed{\sigma_{nn} \leq 0}$

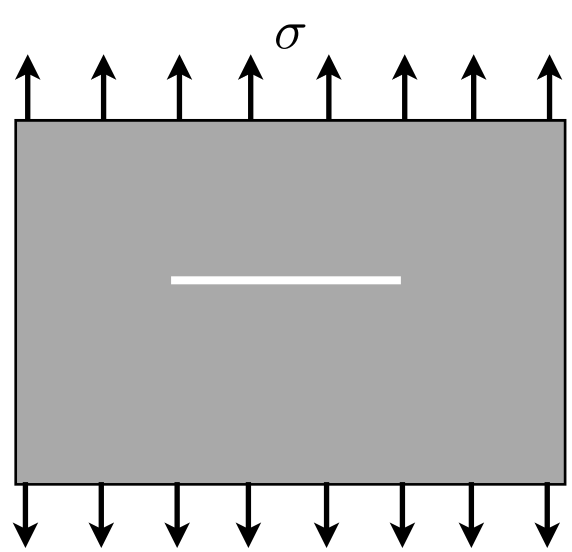
Exemples



- fissure "comprimée" : σ<0

fissure fermée et invisible

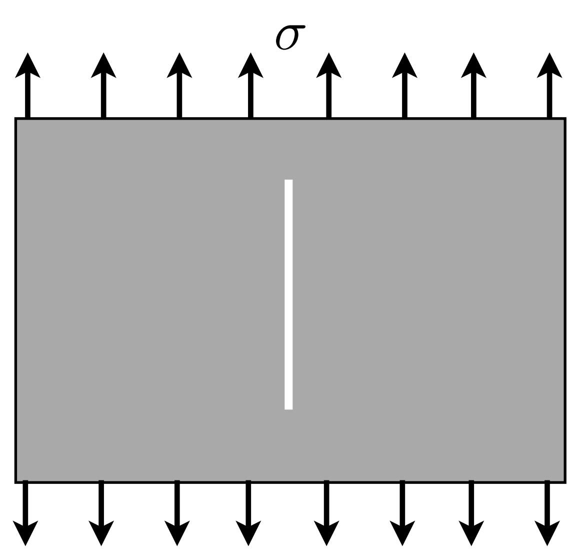
$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) &= \sigma \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ \underline{\xi}(\underline{x}) &= \frac{\sigma}{E}(-\nu x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 - \nu x_3 \underline{e}_3) \end{aligned}$$



- fissure "en traction" : σ>0

fissure ouverte et visible

(pas de solution analytique)



- fissure "bien orientée"

fissure invisible

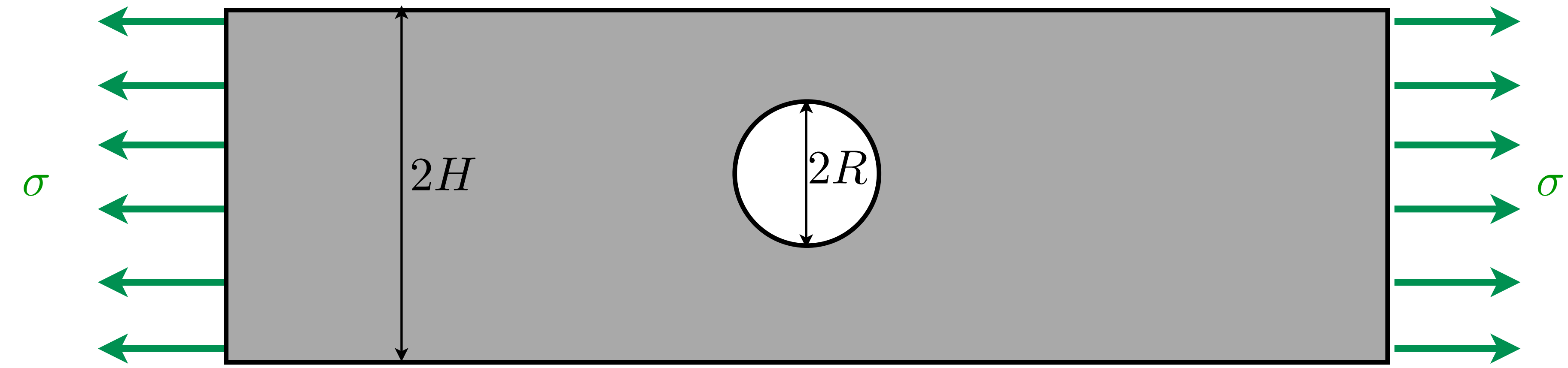
$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) &= \sigma \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ \underline{\xi}(\underline{x}) &= \frac{\sigma}{E}(-\nu x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 - \nu x_3 \underline{e}_3) \end{aligned}$$

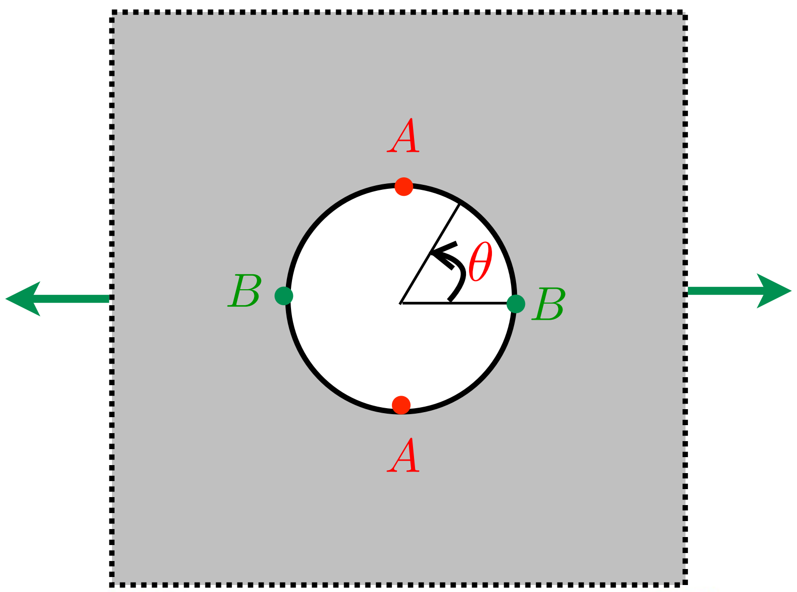
Les singularités en élasticité

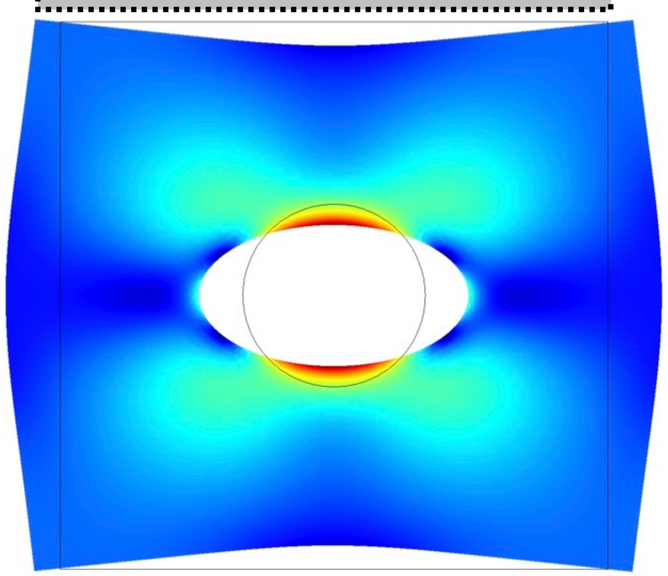
- points anguleux et singularités
- méthode de calcul et exemples en élasticité antiplane, en élasticité plane et en 3D
- cas des fissures et Facteurs d'Intensité des Contraintes

• Concentration des contraintes autour d'une cavité (DP)

‣ Cavité circulaire et chargement uniaxial à l'infini







- En milieu infini

  au bord de la cavité $\boxed{\sigma_{\theta\theta}(R,\theta) = (1 - 2\cos 2\theta)\sigma}$

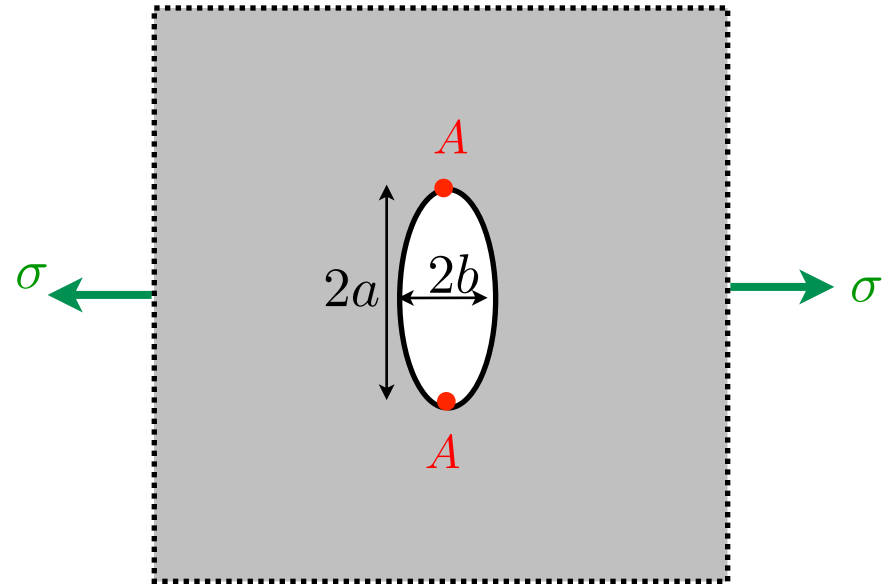
$$\Longrightarrow \begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(A) = \boxed{3\sigma} \\ \sigma_{\theta\theta}(B) = \boxed{-\sigma} \end{cases}$$

- Dans une bande de largeur H

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta}(A) = f\left(\frac{R}{H}\right)\sigma}$$

R/H	0	1/3	1
f	3	3.75	∞

Cavité elliptique, milieu infini et chargement uniaxial à l'infini

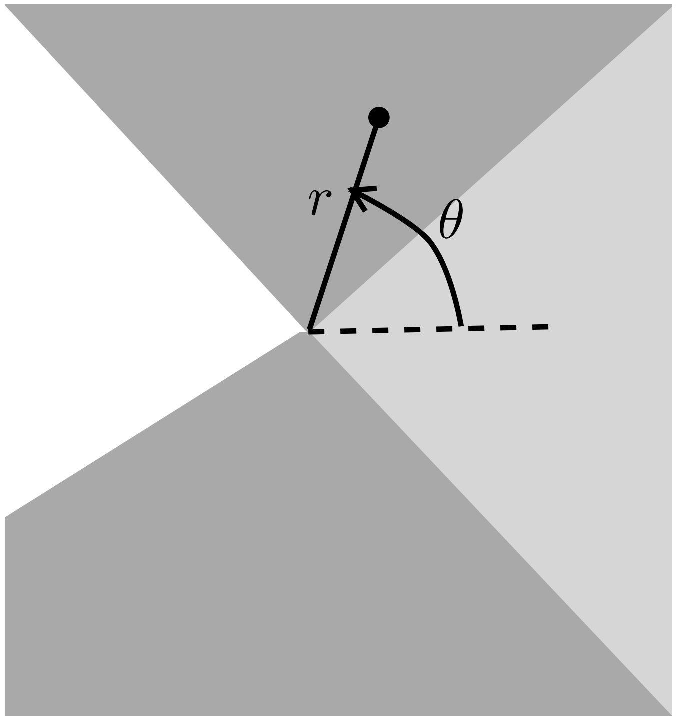


$$\boxed{\sigma_{\theta\theta}(A) = \boxed{\left(1 + 2\frac{a}{b}\right)}\,\sigma}$$

$\Longrightarrow$ les contraintes deviennent infinies en A quand $\boxed{b/a \to 0}$ (fissure)

notion de singularité

forme des singularités en élasticité plane ou anti-plane



- forme des déplacements

$$\underline{\xi} = \sum_{i=1}^{N} K_i \, r^{\alpha_i} \, \underline{U}^i(\theta) + \cdots$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} N & : & \text{nombre de singularités} \\ \alpha_i & : & \text{puissance de la i-ème singularité} \\ \underline{U}^i & : & \text{fonction angulaire de la i-ème singularité} \\ K_i & : & \text{facteur d'intensité de la i-ème singularité} \end{array} \right.$$

- forme des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^{N} K_i \, r^{\alpha_i - 1} \, \underline{\underline{S}}^i(\theta) + \cdots$$

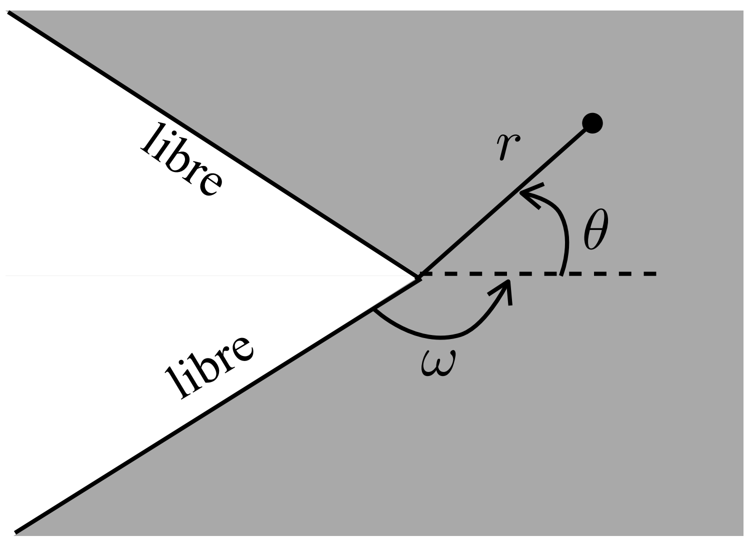
- restrictions sur la puissance de la singularité

- contraintes non bornées : $\alpha_i < 1$
- énergie élastique finie : $\alpha_i > 0$

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \, dV \sim r^{\alpha_i - 1} \, r^{\alpha_i - 1} \, r \, dr \, d\theta \sim r^{2\alpha_i - 1} \, dr \, d\theta$$

$$\boxed{0 < \alpha_i < 1}$$

singularités en fond d'entaille en élasticité anti-plane

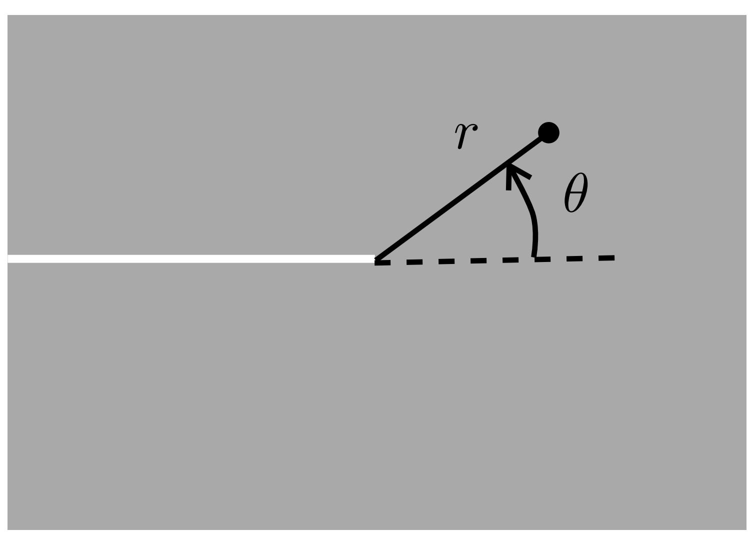


Coin avec bords libres

- élasticité linéaire isotrope
- forces volumiques régulières

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi}$$

$$\xi_z = K\ r^{\frac{\pi}{2\omega}}\ \sin \tfrac{\pi}{2\omega}\theta + \cdots$$



Fissure avec bords libres

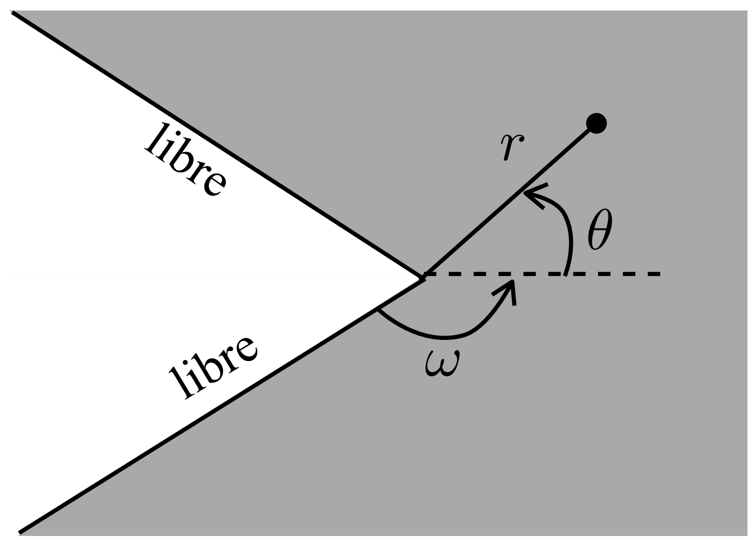
- élasticité linéaire isotrope
- forces volumiques régulières

$$\boxed{\omega = \pi}$$

$$\xi_z = K\ \sqrt{r}\ \sin\frac{\theta}{2} + \cdots$$

<u>Remarque</u> : la fissure correspond à la puissance la plus faible (donc à la singularité la plus forte)

calcul des singularités en fond d'entaille



Remarques :

- la constante multiplicative K (le facteur d'intensité de la singularité) reste indéterminée à ce stade
- le facteur d'intensité est une quantité globale qui dépend de l'ensemble des données (géométrie, élasticité, chargement)
- les forces volumiques ne jouent pas de rôle dans la mesure où elles ne sont pas (trop) singulières. (Elles interviennent dans les termes réguliers et dans la valeur de K).
- on obtient le même résultat si les bords de l'entaille sont soumis à des forces surfaciques pas (trop) singulières

- forme a priori

$$\xi_z = r^\alpha \, U_z(\theta) + \cdots \qquad \boxed{0 < \alpha < 1}$$

- équilibre

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \Delta \xi_z + f_z \\ &= \mu \, r^{\alpha-2} \left(\boxed{\frac{d^2 U_z}{d\theta^2} + \alpha^2 U_z} \right) + \cdots \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad U_z(\theta) = K \sin(\alpha\theta) + K' \cos(\alpha\theta)$$

- conditions aux limites

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{z\theta}(\theta = \pm\omega) \\ &= \mu r^{\alpha-1} \boxed{\frac{dU_z}{d\theta}(\pm\omega)} + \cdots \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad K \cos(\alpha\omega) = K' \sin(\alpha\omega) = 0$$

$$\begin{array}{ll} K = K' = 0 & \text{non admis (car alors } U_z = 0) \\ \sin(\alpha\omega) \neq 0 & \text{car } 0 < \alpha < 1 \text{ et } 0 < \omega \leq \pi \end{array}$$

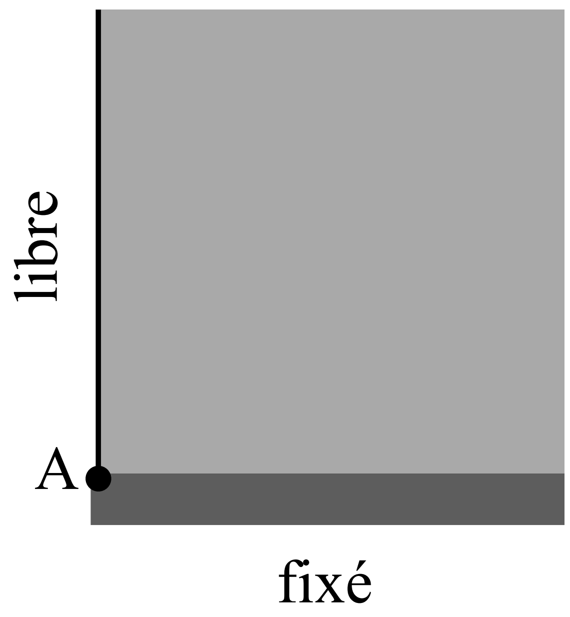
$$\Longrightarrow \qquad \cos(\alpha\omega) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2\omega}}$$

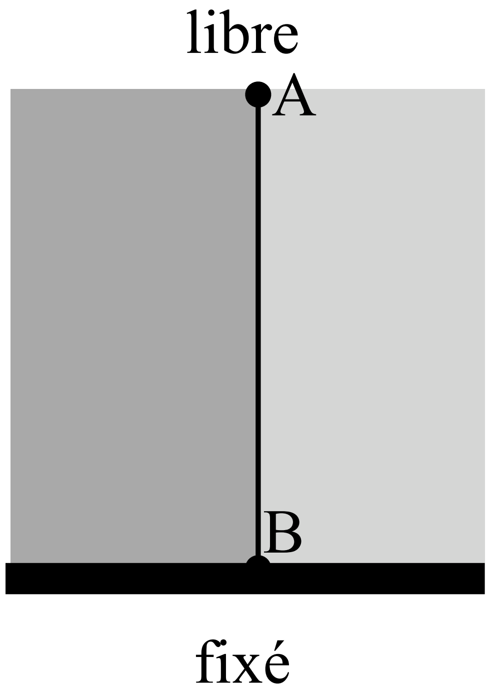
$$\Longrightarrow \qquad K' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{U_z(\theta) = K \ \sin\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right)}$$

singularités en élasticité plane

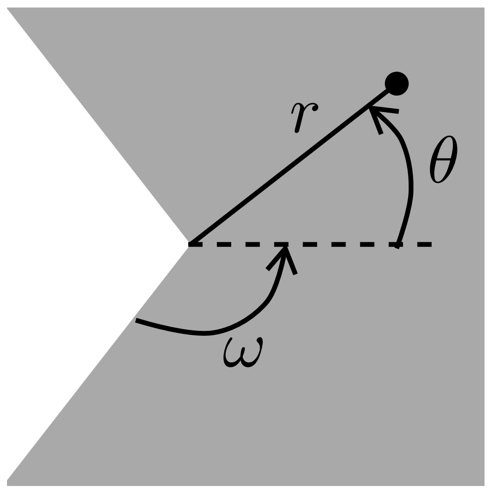
- plus de singularités qu'en élasticité anti-plane
- influence du coefficient de Poisson
- exemples

- à un angle droit d'un encastrement et d'un bord libre
- au bord libre d'une interface
- à l'intersection d'un encastrement et d'une interface





singularité en fond d'entaille en DP



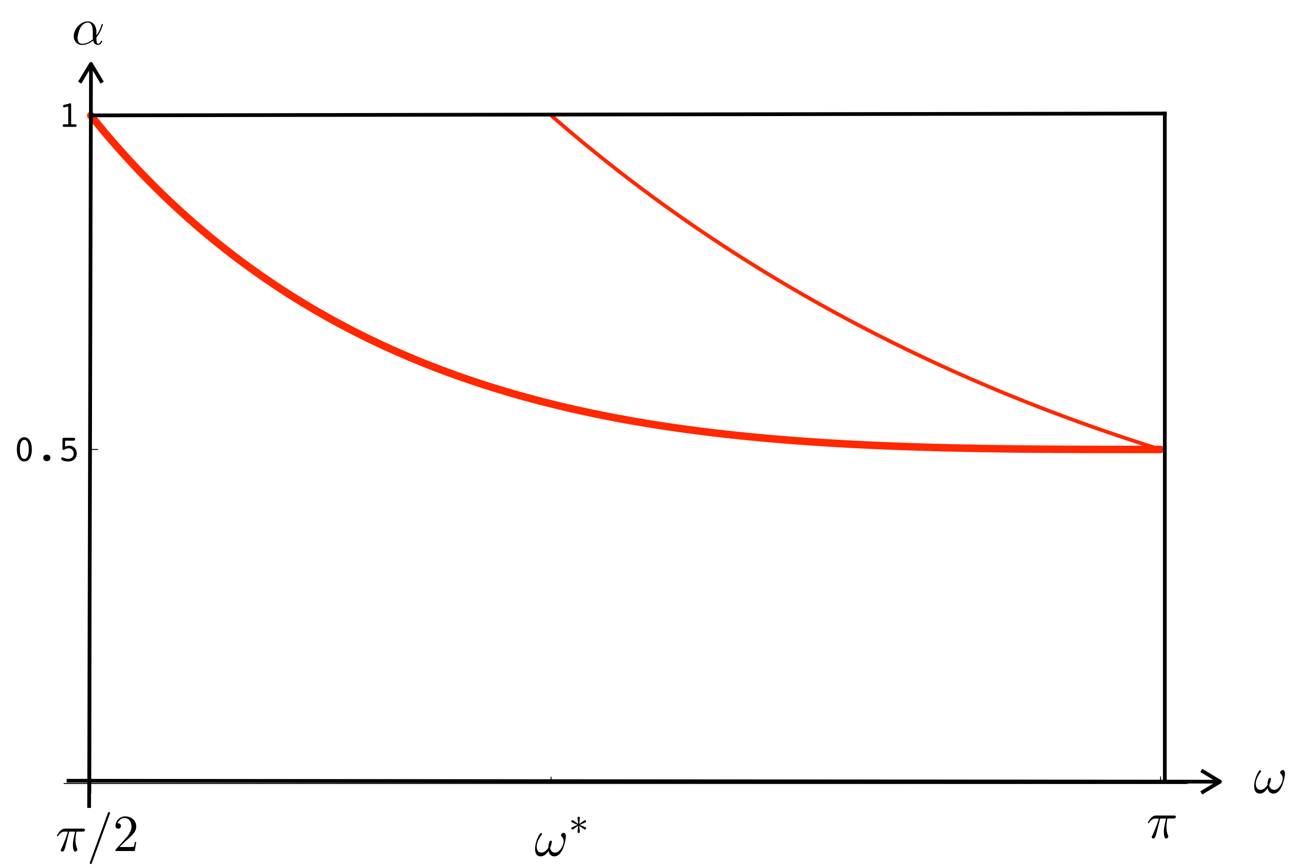
- le cadre

entaille à bords libres, déformation plane, élasticité linéaire, isotropie

- résumé des résultats (cf polycopié pour détails)

Angle sortant ou plat	$0 < \omega \leq \pi/2$	:	Pas de singularité ;
Angle "ouvert"	$\pi/2 < \omega \leq \omega^*$	:	Une singularité ;
Angle "fermé"	$\omega^* < \omega < \pi$	:	Deux singularités de puissance différente ;
Fissure	$\omega = \pi$	:	Deux singularités de même puissance $\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$

$$\text{tg}\, 2\omega^* = 2\omega^*$$
$$\omega^* \approx 129°$$



contraintes et déplacements singuliers

- En déformations planes

$$\sigma_{rr} = \frac{\mathsf{K_I}}{4\sqrt{2\pi r}}\left(-\cos\frac{3\theta}{2} + 5\cos\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\mathsf{K_{II}}}{4\sqrt{2\pi r}}\left(3\sin\frac{3\theta}{2} - 5\sin\frac{\theta}{2}\right) + \cdots$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\mathsf{K_I}}{4\sqrt{2\pi r}}\left(\sin\frac{3\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\mathsf{K_{II}}}{4\sqrt{2\pi r}}\left(3\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) + \cdots$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\mathsf{K_I}}{4\sqrt{2\pi r}}\left(\cos\frac{3\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\mathsf{K_{II}}}{4\sqrt{2\pi r}}\left(3\sin\frac{3\theta}{2} + 3\sin\frac{\theta}{2}\right) + \cdots$$

$$\xi_r = \frac{\mathsf{K_I}}{4\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(-\cos\frac{3\theta}{2} + (5-8\nu)\cos\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\mathsf{K_{II}}}{4\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(3\sin\frac{3\theta}{2} - (5-8\nu)\sin\frac{\theta}{2}\right) + \cdots$$

$$\xi_\theta = \frac{\mathsf{K_I}}{4\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\sin\frac{3\theta}{2} - (7-8\nu)\sin\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\mathsf{K_{II}}}{4\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(3\cos\frac{3\theta}{2} - (7-8\nu)\cos\frac{\theta}{2}\right) + \cdots$$

- En déformations anti-planes

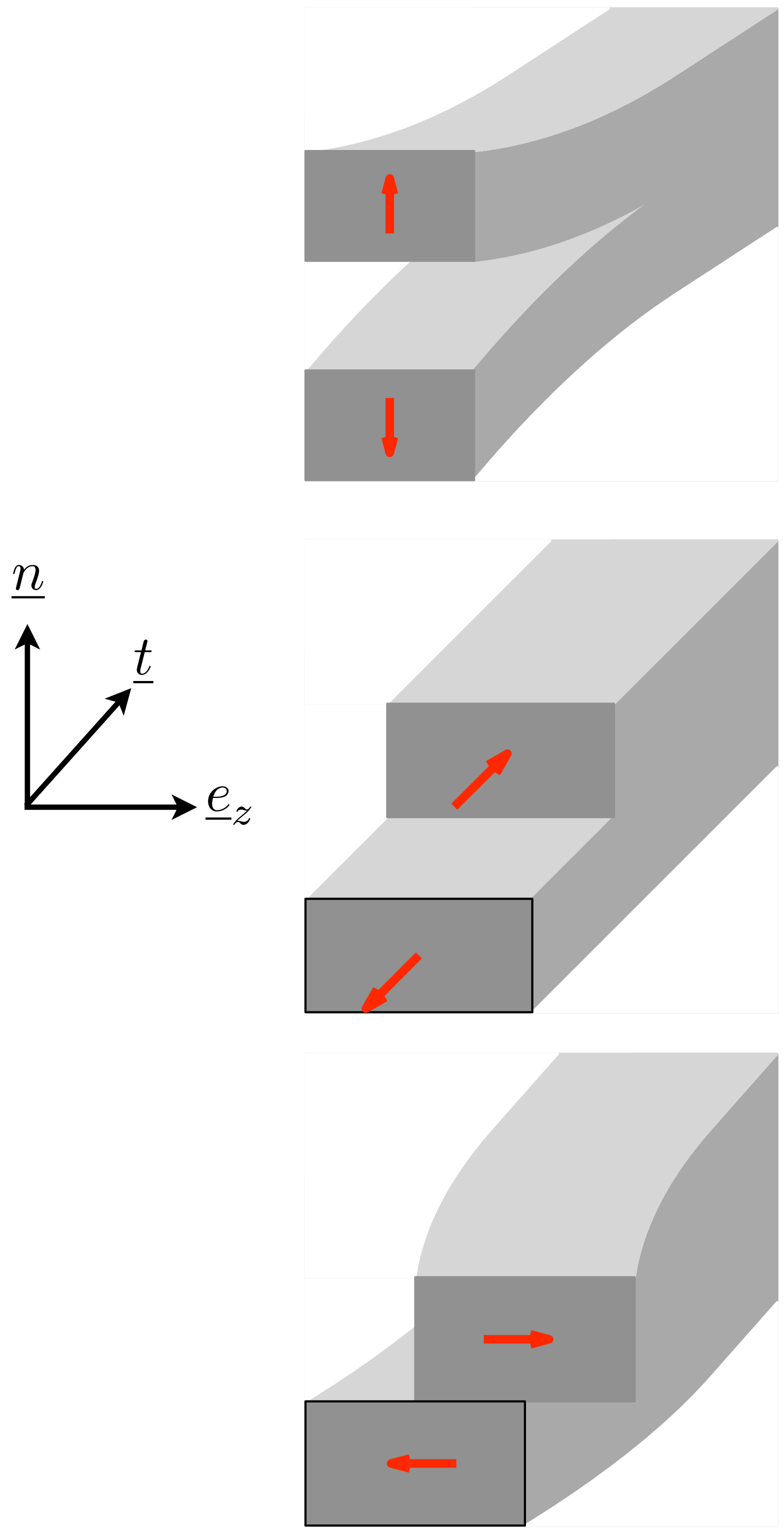
$$\sigma_{rz} = \frac{\mathsf{K_{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\tfrac{\theta}{2} + \cdots$$

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mathsf{K_{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\tfrac{\theta}{2} + \cdots$$

$$\xi_z = \frac{2\mathsf{K_{III}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\tfrac{\theta}{2} + \cdots$$

unités des FIC : MPa $\sqrt{\mathrm{m}}$

les 3 modes singuliers en fond de fissure



mode I ou mode d'ouverture

- discontinuité normale,
- pas de discontinuité tangentielle

$$[\![\underline{\xi}]\!]\cdot\underline{n} = 8(1-\nu^2)\frac{\mathrm{K_I}}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

- condition de non interpénétration $\boxed{\mathrm{K_I} \geq 0}$

mode II ou mode de glissement

- pas de discontinuité normale,
- discontinuité tangentielle plane

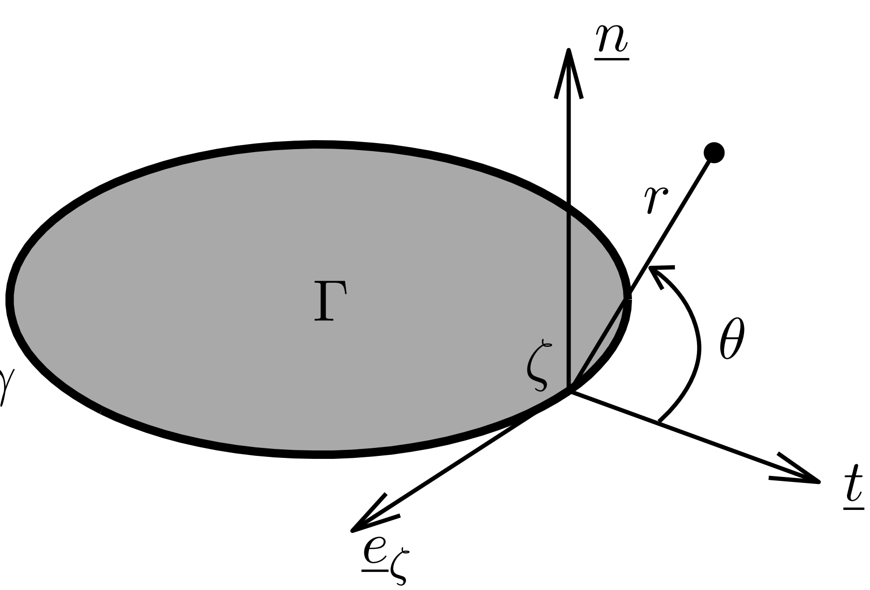
$$[\![\underline{\xi}]\!]\cdot\underline{t} = 8(1-\nu^2)\frac{\mathrm{K_{II}}}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

mode III ou mode de déchirure

- pas de discontinuité normale,
- discontinuité tangentielle antiplane

$$[\![\underline{\xi}]\!]\cdot\underline{e}_z = \frac{4\mathrm{K_{III}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

en 3D



- géométrie du front de fissure

vecteur tangent au front	:	$\underline{e}_\zeta$
plan normal au front	:	$(\underline{t}, \underline{n})$
plan tangent à la fissure	:	$(\underline{e}_\zeta, \underline{t})$
coordonnées curvilignes	:	(r, θ, ζ)
coordonnées polaires dans le plan normal	:	(r, θ)
abscisse curviligne du front	:	ζ

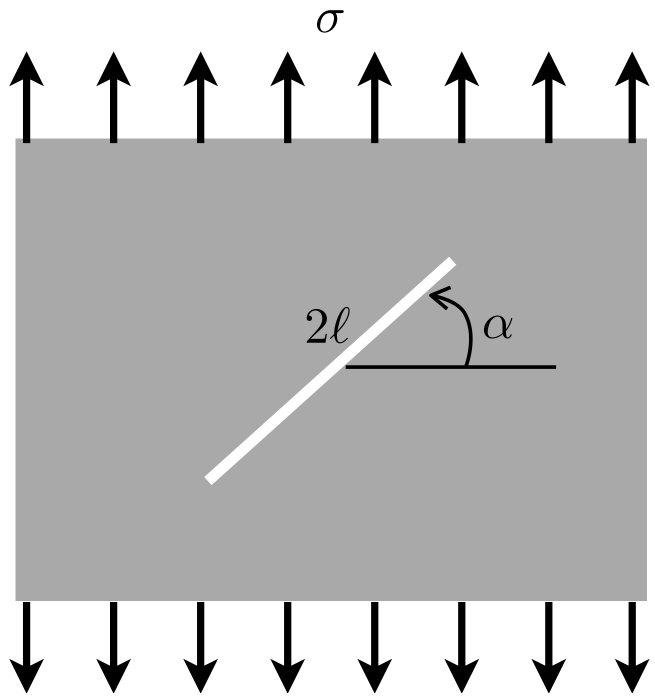
- singularités

$$\boxed{\underline{\xi}(\underline{x}) = \sum_{i=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} K_i(\zeta)\sqrt{r}\Big(U_r^i(\theta)\underline{e}_r + U_\theta^i(\theta)\underline{e}_\theta + U_\zeta^i(\theta)\underline{e}_\zeta\Big) + \cdots}$$

- les modes I et II sont le mêmes qu'en déformation plane dans le plan normal au front
- le mode III est le même qu'en déformation antiplane dans la direction tangente au front
- les facteurs d'intensité des contraintes varient le long du front

Exemples de FIC

Fissure rectiligne en milieu 2D infini



Traction à l'infini

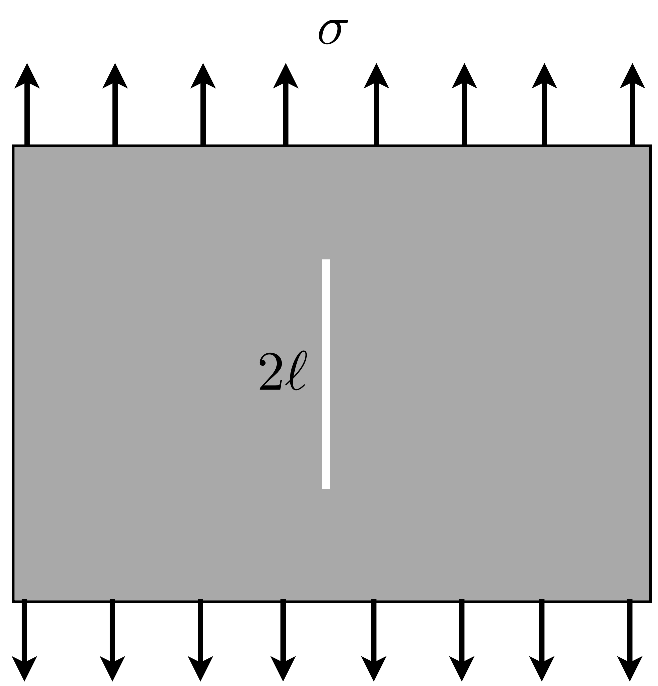
- mode mixte (sauf si $\alpha = 0$ ou $\pi/2$)

$$\boxed{K_I = \sigma\sqrt{\pi\ell}\cos^2\alpha} \qquad \boxed{K_{II} = \sigma\sqrt{\pi\ell}\cos\alpha\sin\alpha}$$

Compression à l'infini

- Contact entre les lèvres
- Mode II pur (sauf si $\alpha = 0$, auquel cas fissure invisible)

$$\boxed{K_I = 0} \qquad \boxed{K_{II} = \sigma\sqrt{\pi\ell}\cos\alpha\sin\alpha}$$

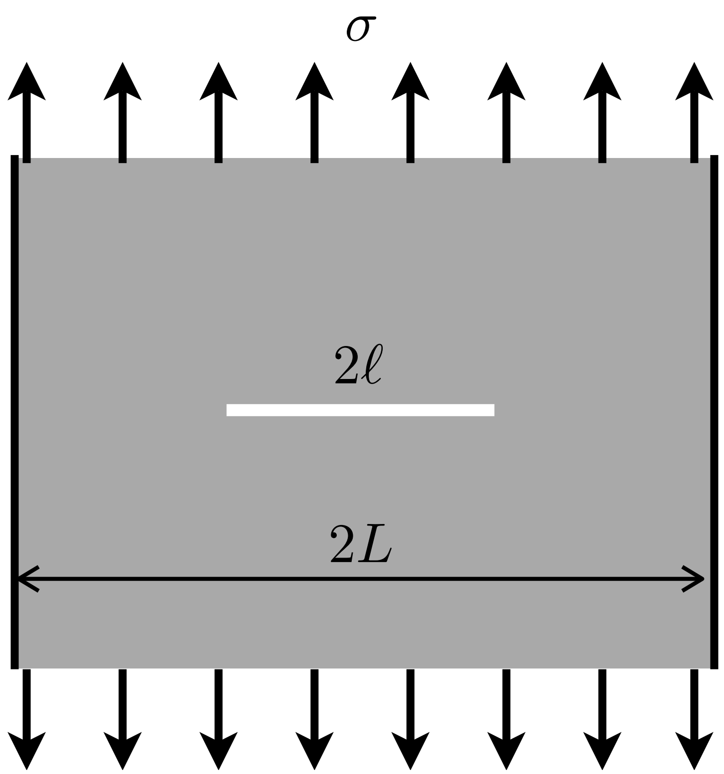


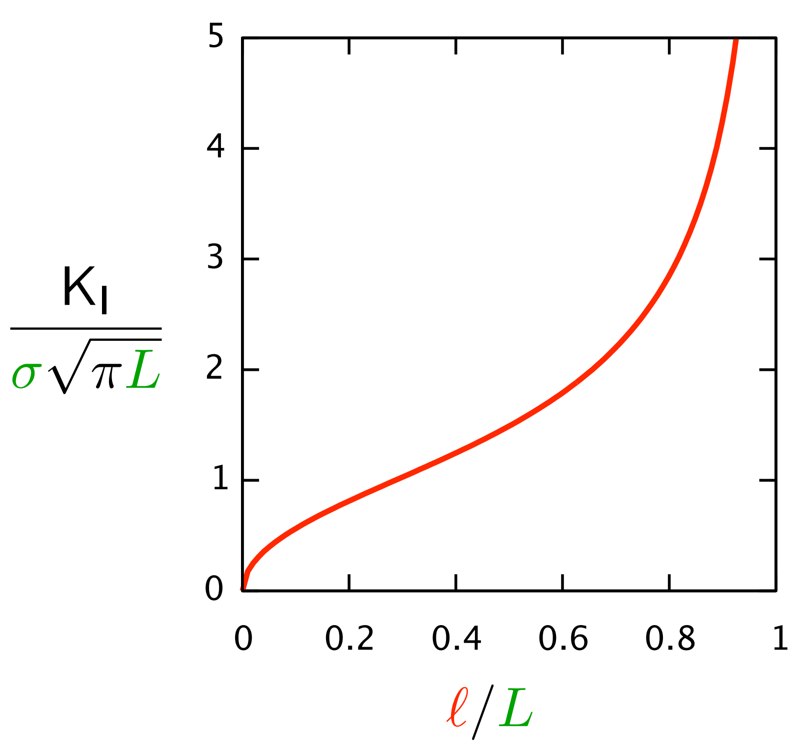
Fissure parallèle à la direction de traction

- Fissure invisible en traction et en compression

$$\boxed{K_I = K_{II} = 0}$$

Fissure transversale dans une bande infinie 2D





Traction

- par symétrie, mode I pur
- on retrouve le résultat précédent quand L tend vers l'infini
- le FIC tend vers l'infini quand la fissure se rapproche du bord

$$\boxed{K_I = \sigma\sqrt{\frac{\pi\ell}{\cos\frac{\pi\ell}{2L}}}}$$

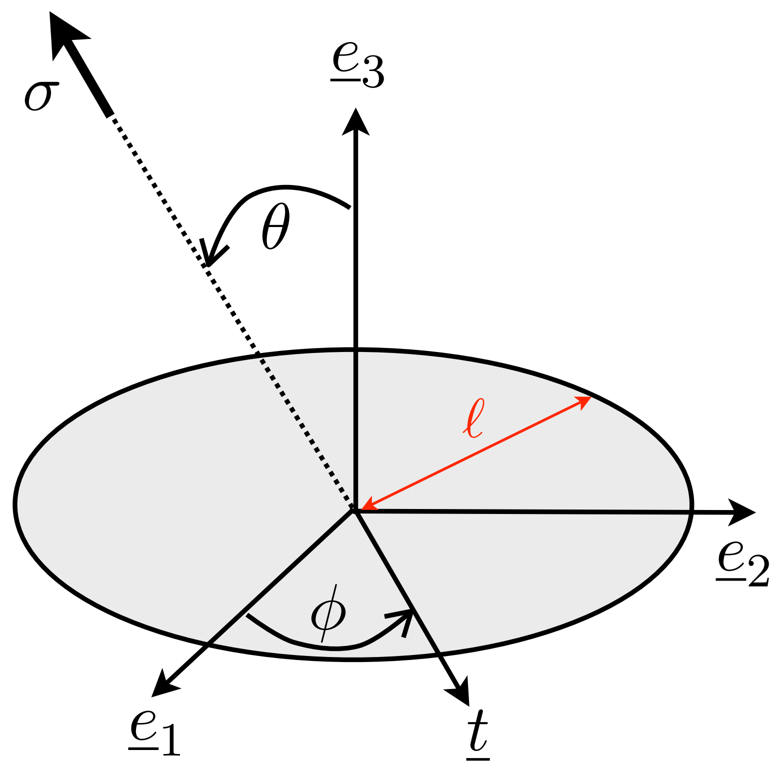
$$\boxed{K_{II} = 0}$$

Compression

- contact entre les lèvres
- fissure invisible

$$\boxed{K_I = K_{II} = 0}$$

Fissure plane circulaire en milieu infini



- Traction à l'infini

fissure ouverte

$$
\begin{aligned}
\mathsf{K}_{\mathsf{I}}(\phi) &= 2\sigma\sqrt{\frac{\ell}{\pi}}\,\cos^2\theta \\
\mathsf{K}_{\mathsf{II}}(\phi) &= \frac{2\sigma}{2-\nu}\sqrt{\frac{\ell}{\pi}}\,\sin 2\theta\cos\phi \\
\mathsf{K}_{\mathsf{III}}(\phi) &= \frac{2(1-\nu)\sigma}{2-\nu}\sqrt{\frac{\ell}{\pi}}\,\sin 2\theta\sin\phi
\end{aligned}
$$

- Compression à l'infini

fissure fermée

$$\mathsf{K}_{\mathsf{I}}(\phi) = 0$$

- Orientations particulières

- $\Theta=\pi/2$:

fissure invisible

$$\mathsf{K}_{\mathsf{I}}(\phi) = \mathsf{K}_{\mathsf{II}}(\phi) = \mathsf{K}_{\mathsf{III}}(\phi) = 0$$

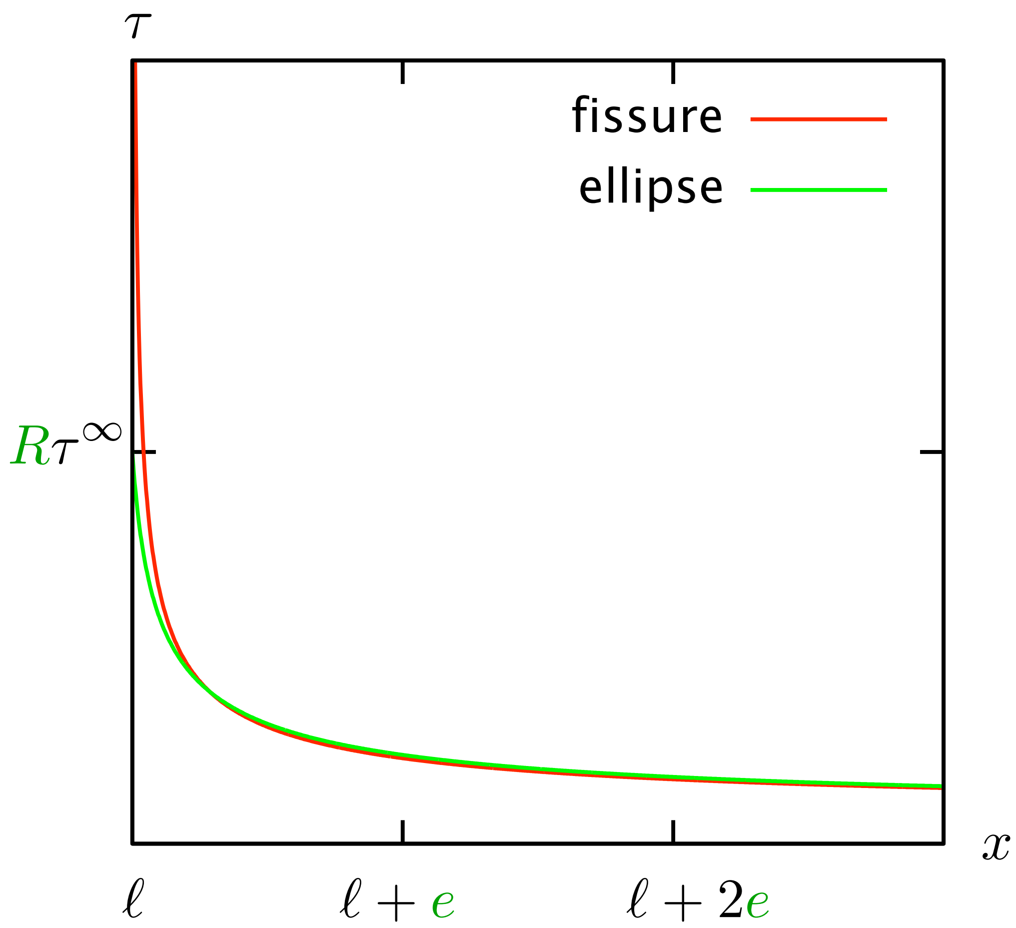
- $\Theta=0$:

mode I pur en traction

$$\mathsf{K}_{\mathsf{I}}(\phi) = 2\sigma\sqrt{\frac{\ell}{\pi}} \qquad \mathsf{K}_{\mathsf{II}}(\phi) = \mathsf{K}_{\mathsf{III}}(\phi) = 0$$

fissure invisible en compression

Pourquoi calculer des singularités qui n'existent pas



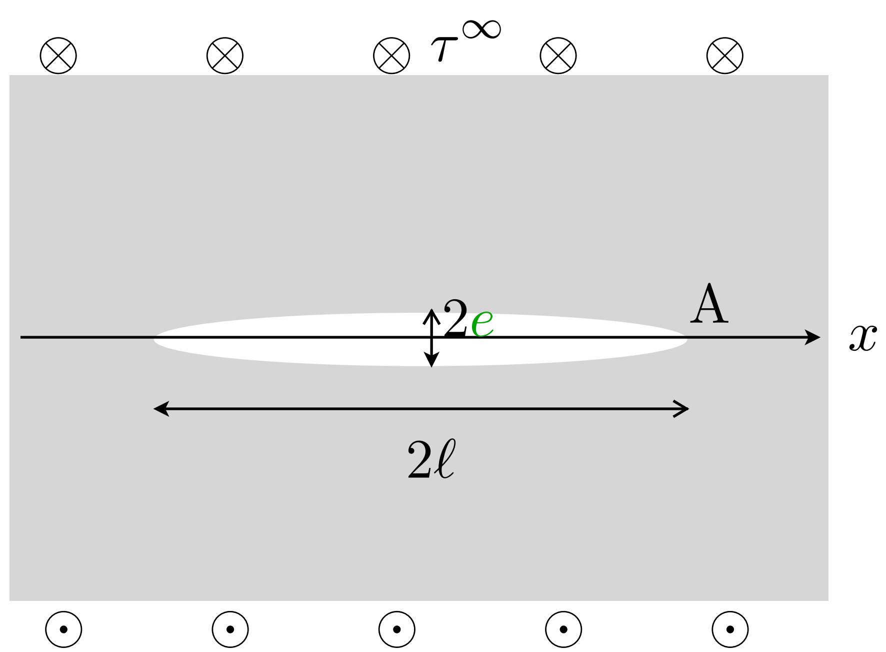
répartition des cisaillements le long de l'axe x
en rouge : pour une fissure
en vert : pour une cavité elliptique

Du point de vue géométrique

Si l'on supprime les points anguleux en les émoussant, alors les singularités disparaissent mais

1. des concentrations de contraintes subsistent et elles tendent vers l'infini comme la courbure de l'émoussement;
2. on retrouve pratiquement les champs singuliers à une distance du point anguleux régularisé de l'ordre du rayon de courbure;
3. il n'est pas plus facile de calculer la solution régularisée que la solution singulière;
4. la solution régularisée au voisinage du point anguleux dépend fortement de la façon dont on émousse ce point

Exemple : Cavité elliptique en antiplan dans un milieu infini soumise à un cisaillement uniforme à l'infini



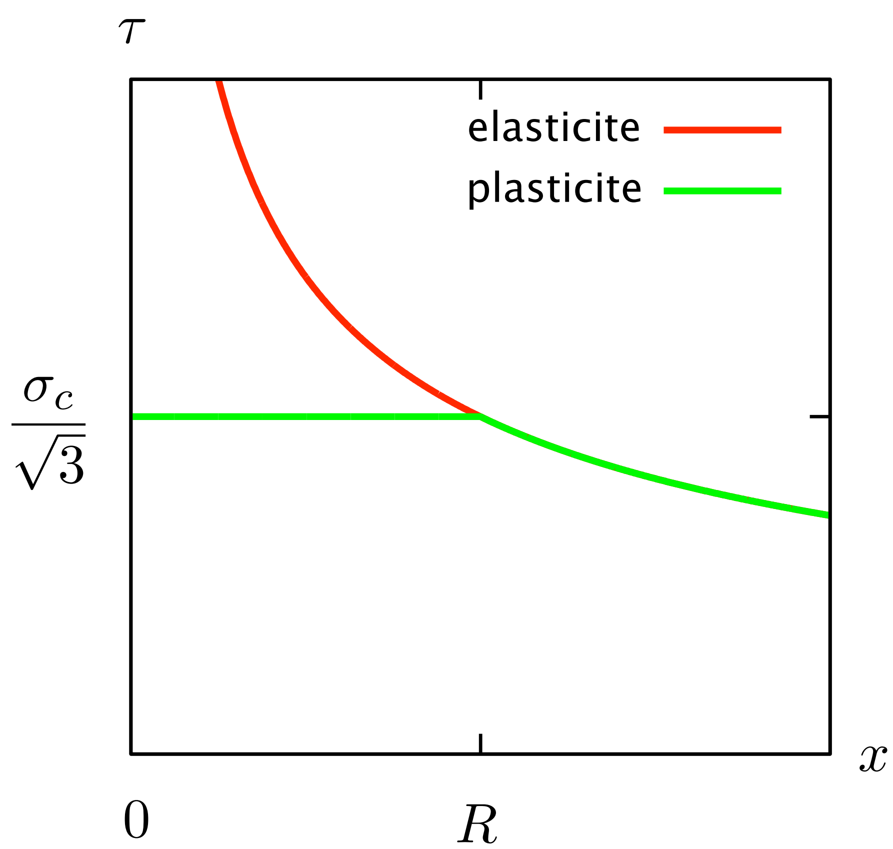
concentration de contrainte en A : $\boxed{R = 1 + \frac{\ell}{e}}$

Du point de vue matériel

Si l'on tient compte de la plasticité, alors les singularités des contraintes disparaissent car une zone plastique apparaît au voisinage du point anguleux mais pour des matériaux fragiles

1. la zone plastique reste généralement confinée à un voisinage du point anguleux;
2. on retrouve la forme des champs singuliers de l'élasticité au delà;
3. les déformations et les déformations plastiques peuvent être plus singulières dans la zone plastique que les déformations de la solution purement élastique

Exemple : Solution exacte (MacClintock, 1965) du problème d'élasto-plasticité pour une fissure semi-infinie dans un milieu infini en situation antiplane (cf PC6)

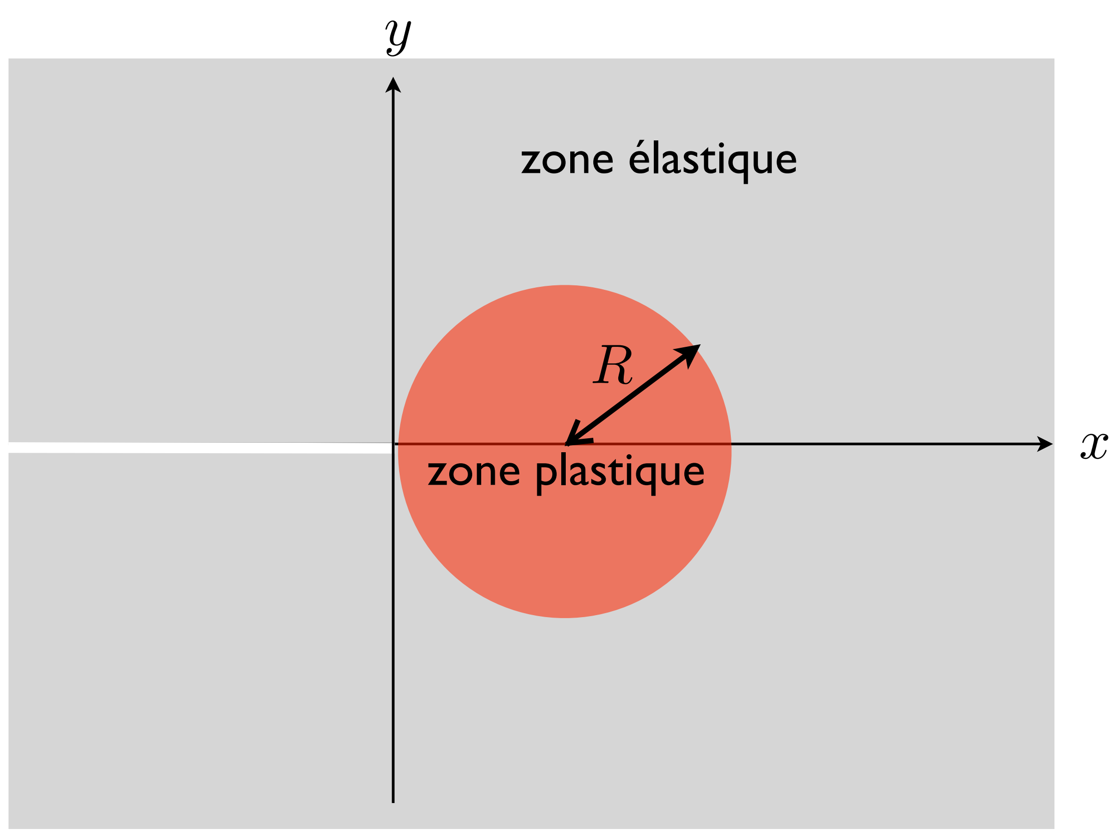


répartition des cisaillements le long de l'axe x
en rouge : en élasticité
en vert : en élasto-plasticité

rayon de la zone plastique
au moment de la propagation

$$\boxed{R_c = \frac{3\mu G_c}{\pi \sigma_c^2}}$$

longueur caractéristique du matériau



La ténacité et le critère d'Irwin

- La ténacité
  - Facteur d'intensité des contraintes critique (en mode I)
  - Caractéristique du matériau "en pointe de fissure"
  - À mesurer expérimentalement

- Le critère d'Irwin
  - Exclusivement pour une fissure en mode I "pur" dans un matériau isotrope

$$\boxed{\mathsf{K_I} \leq \mathsf{K_{Ic}}, \quad \begin{cases} \text{si } \mathsf{K_I} < \mathsf{K_{Ic}}, & \text{pas de propagation} \\ \text{si } \mathsf{K_I} = \mathsf{K_{Ic}}, & \text{propagation possible} \end{cases}}$$

Mesure de la ténacité

- Essais sur des éprouvettes normalisées

  Eprouvette CT ou Essai de flexion 3 points

  Préfissuration de l'éprouvette (par fatigue)

  Chargement monotone et mesure de la charge de démarrage de la fissure

- Calcul du Facteur d'Intensité des contraintes

  Calcul par éléments finis du K_I dans des conditions de déformations planes en élasticité

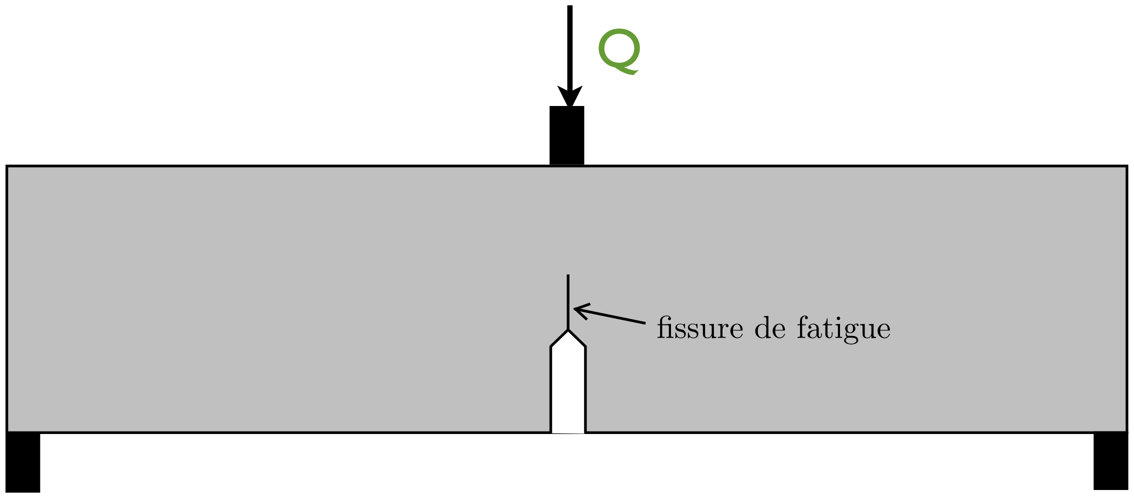
  Par linéarité K_I est proportionnel à la charge Q

- Les sources d'erreur

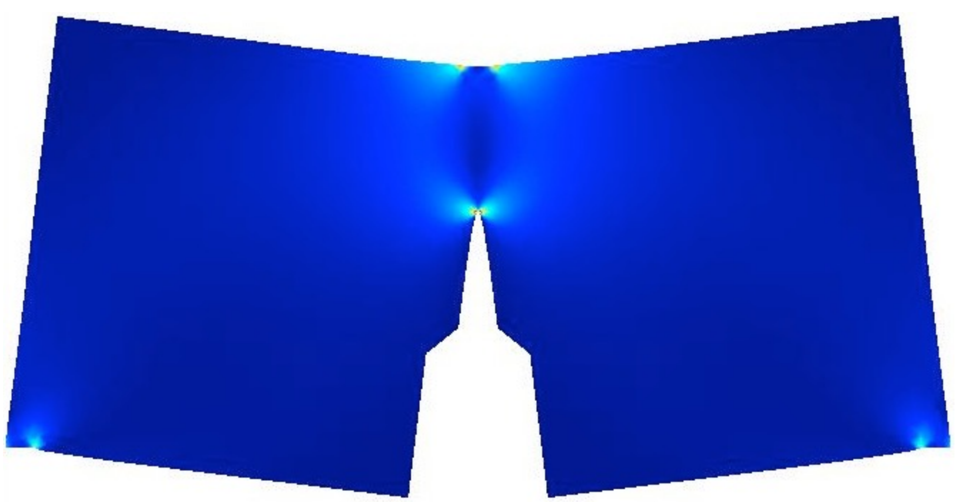
  Calculs 2D en DP alors que l'essai est 3D

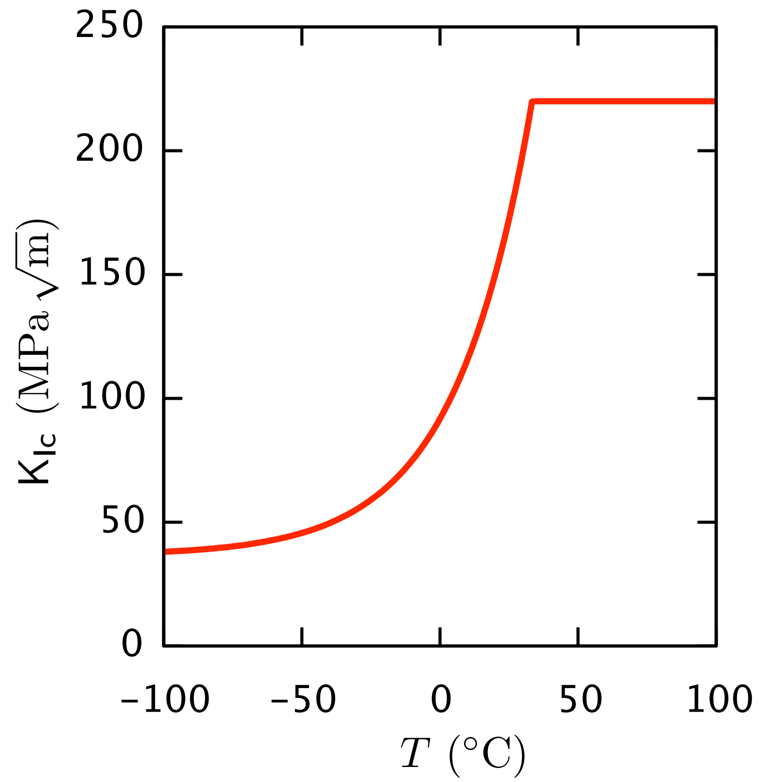
  La valeur de K_I n'est pas constante le long du front

  Les phénomènes anélastiques (plasticité) viennent accroître les effets 3D



Essai de flexion 3 points





dépendance à la température
de la ténacité d'un acier

La ténacité de quelques matériaux

Matériau	E (GPa)	K_{Ic} (MPa $\sqrt{m}$)	G_c (J /m^2)
Diamant	1000	4	15
Verre (Silice)	70	0.75	8
Mica	170	1.3	10
Composites à fibres de carbone	200–400	20–25	1000–3000
Pâte de ciment	20	0.5	10
Béton	30	1–1.5	30–70
Acier	200	20–200	2000–200000

Influence de la température

- Les métaux sont ductiles à "haute température" avec une ténacité élevée, mais fragiles à "basse température" avec une ténacité faible
- Transition fragile-ductile
- Source d'accidents spectaculaires (Liberty-ships, Pont de Sully sur Loire)

$$\boxed{G_c = \frac{1-\nu^2}{E} {K_{Ic}}^2}$$

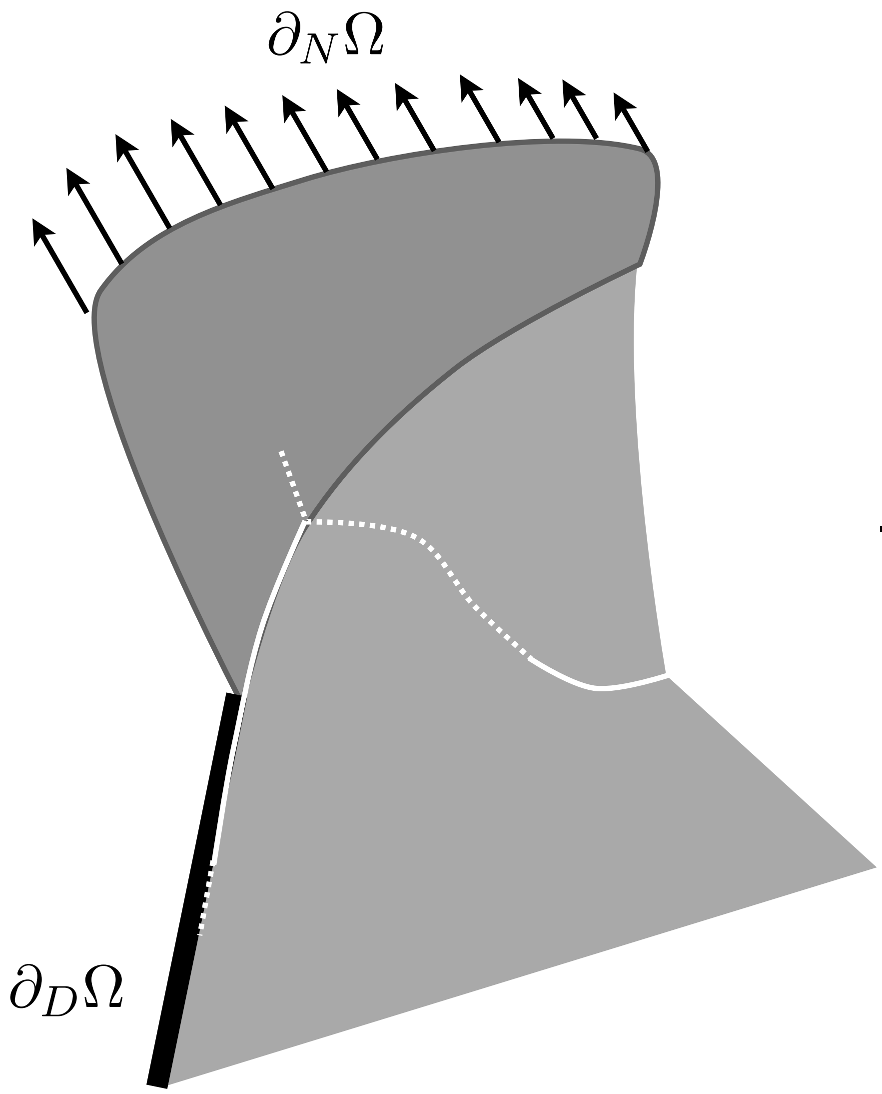
- Nécessité d'élargir le critère d'Irwin
  - S'applique aux fissures en mode I dans un matériau isotrope et linéairement élastique
  - Ne s'applique pas
    - aux matériaux anisotropes
    - aux fissures en mode mixte
    - aux fissures aux interfaces ou sur le bord
  - Ne fournit pas une loi d'évolution complète de la fissuration

- Le principe énergétique de Griffith (1920)
  - Créer des fissures nécessite d'apporter une énergie de surface à la structure
  - En "première approximation" cette énergie de surface est proportionnelle à la surface créée
  - L'énergie nécessaire est fournie par l'énergie potentielle restituée lors de la propagation

Les grandeurs énergétiques

- La formulation variationnelle de l’équilibre
- L’énergie potentielle
- Le taux de restitution de l’énergie potentielle
- Lien avec les singularités

L'énergie potentielle d'une structure fissurée



- les déplacements cinématiquement admissibles

- définition

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \Big\{ \underline{\xi}^* \quad : \quad \underline{\xi}^* \text{ régulier dans } \bar{\Omega}\backslash\Gamma, \quad \underline{\xi}^* = \underline{\xi}^d \text{ sur } \partial_D\Omega\backslash\Gamma,$$
$$\underline{\xi}^{*+} = \underline{\xi}^d \text{ sur } \partial_D\Omega \cap \Gamma, \quad [\![\underline{\xi}^*]\!] \cdot \underline{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma \Big\}$$

$$\boxed{\text{régulier} = \text{d'énergie finie}}$$

- propriété

$\mathcal{C}$ est une fonction croissante de Γ :

$$\boxed{\Gamma \subset \Gamma' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}(\Gamma) \subset \mathcal{C}(\Gamma')}$$

‣ le théorème de l'énergie potentielle

- définition de l'énergie potentielle virtuelle

Pour un chargement et un état de fissuration Γ donnés, on associe à un déplacement cinématiquement admissible $\underline{\xi}^*$ l'énergie potentielle $\mathcal{P}(\underline{\xi}^*)$ qu'aurait la structure si elle était dans cet état

$$\boxed{\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}(\Gamma) \mapsto \mathcal{P}(\underline{\xi}^*) = \int_{\Omega\setminus\Gamma} \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*) : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}^*)\,d\Omega - W^e(\underline{\xi}^*)}$$

- le théorème

Si le chargement et l'état de fissuration Γ sont compatibles avec l'équilibre, alors le champ de déplacement à l'équilibre $\underline{\xi}$ est celui qui minimise l'énergie potentielle parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles :

$$\boxed{\underline{\xi} \in \mathcal{C}(\Gamma), \qquad \mathcal{P}(\underline{\xi}) \leq \mathcal{P}(\underline{\xi}^*), \quad \forall \underline{\xi}^* \in \mathcal{C}(\Gamma)}$$

- l'énergie potentielle réelle

$$\boxed{\mathsf{P}(\Gamma) = \mathcal{P}(\underline{\xi}) = \min_{\underline{\xi}^* \in \mathcal{C}(\Gamma)} \mathcal{P}(\underline{\xi}^*)}$$

Le taux de restitution d'énergie potentielle

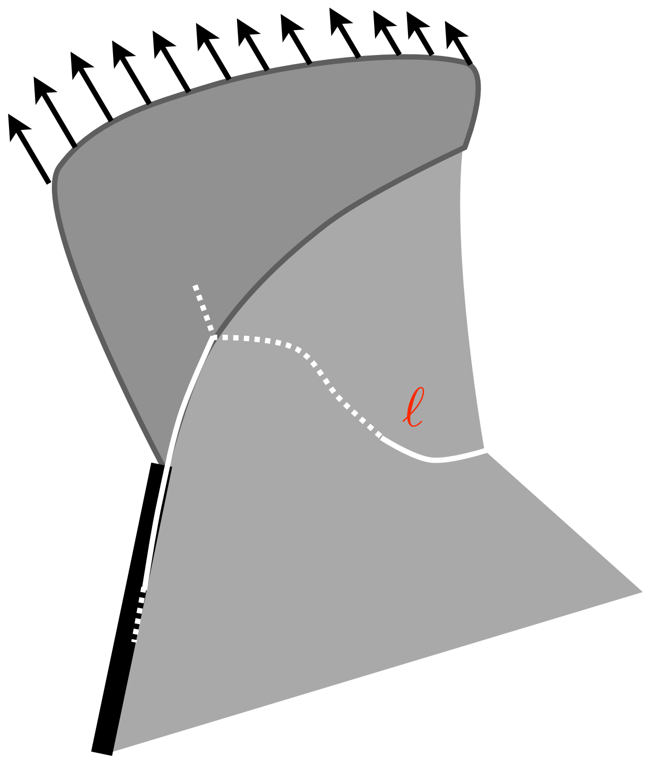
- Formule générique

$$\mathsf{G} = -\lim_{h \to 0} \frac{\mathsf{P}(\Gamma_h) - \mathsf{P}(\Gamma)}{\text{aire}(\Gamma_h) - \text{aire}(\Gamma)}$$

Γ_h = nouvel état virtuel de la fissure

Γ = état réel de la fissure

- Le cas d'une fissure au trajet prédéfini en 2D



- chargement fixé
- trajet de fissuration = courbe simple
- énergie potentielle fonction de la longueur de la fissure

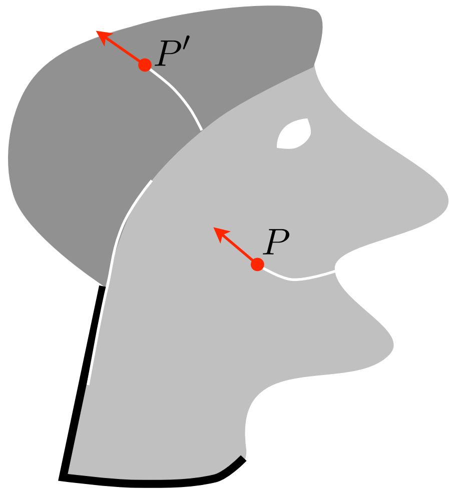
$$\mathsf{G} := -\frac{1}{e}\frac{d\mathsf{P}}{d\ell}(\ell)$$

e=épaisseur

ATTENTION. Ne pas oublier l'épaisseur e dans le calcul de P

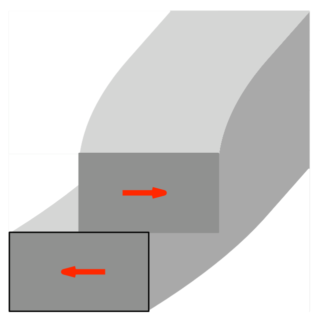
unité de G = énergie par unité de surface = J/m^2

La formule d'Irwin



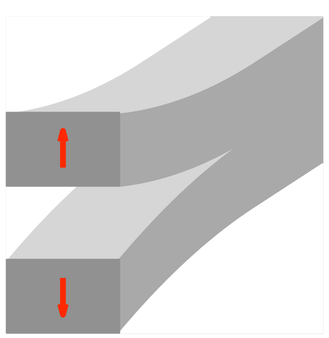
- Cadre d'application
  - marériau isotrope, élasticité linéaire
  - sans changement de direction, hors interface
  - formules valables en P et en P', mais pas aux autres pointes

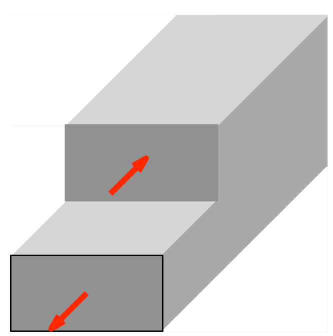
- En antiplan (mode III)



$$\boxed{G = \frac{K_{III}^2}{2\mu}}$$

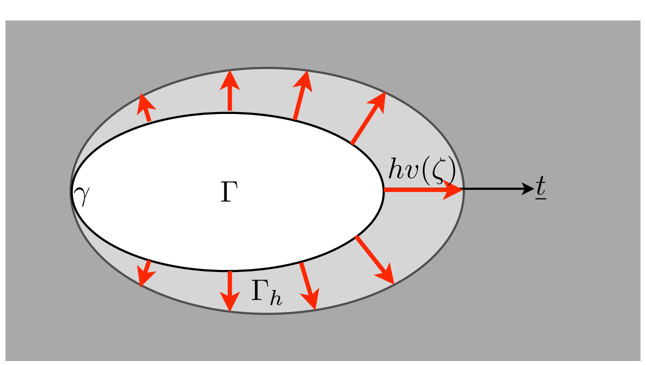
- En DP (modes I et II)





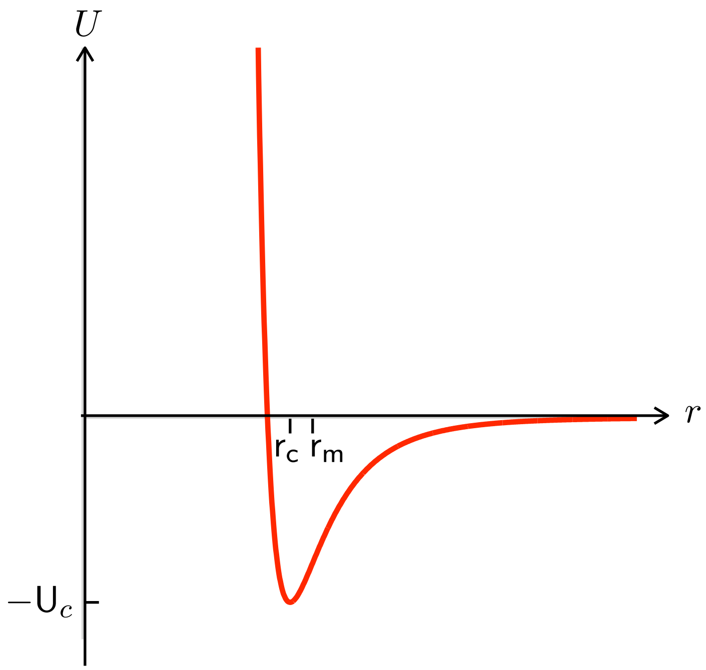
$$\boxed{G = (1-\nu^2)\frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E}}$$

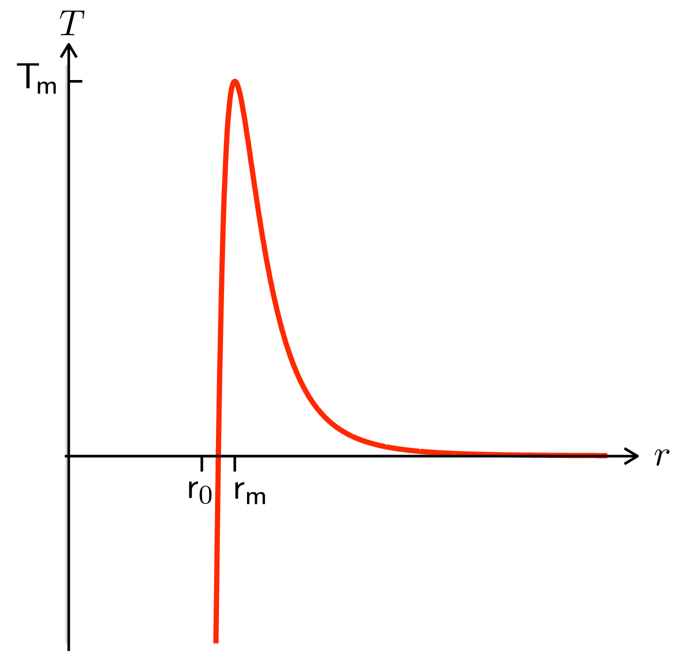
- En 3D (modes I, II et III)



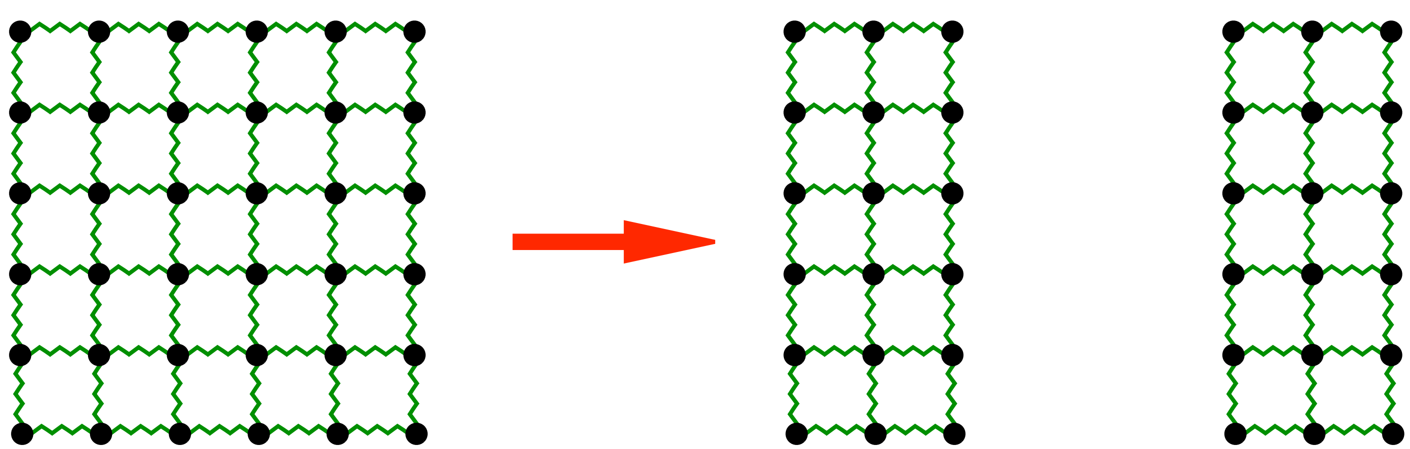
$$\boxed{G(\zeta) = (1-\nu^2)\frac{K_I(\zeta)^2 + K_{II}(\zeta)^2}{E} + \frac{K_{III}(\zeta)^2}{2\mu}}$$

Origine microscopique de l'énergie de surface





$$r_c = 2^{1/6} r_0$$



Potentiels interatomiques

$$U(r) = 4U_c\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right)$$

$$T(r) = -U'(r) = \frac{24U_c}{r}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right)$$

Energie de séparation de plans atomiques

Si l'on ne tient compte que de l'interaction des plus proches voisins, l'énergie supplémentaire que possède l'objet coupé en deux à l'équilibre est proportionnelle à la surface de séparation

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{cassé}} - \mathcal{E}_{\text{intact}} \approx G_c S}$$

$$\boxed{G_c = \frac{U_c}{{r_c}^2}}$$

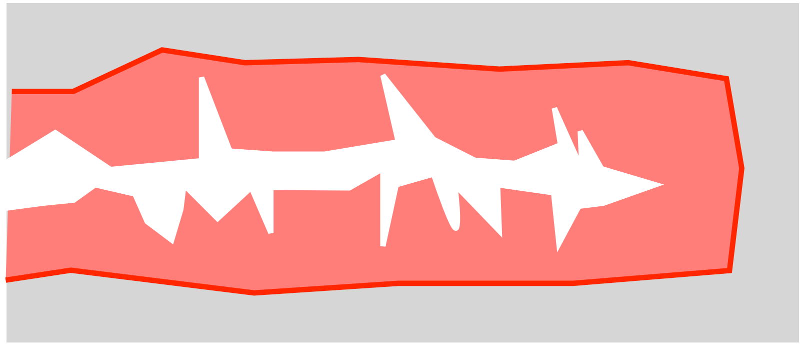
Comparaison avec les valeurs expérimentales

- valeurs théoriques trop faibles
- explications:

  Non prise en compte des défauts

  Rugosité des surfaces

  Présence d'une zone d'élaboration (plasticité, microdéfauts, ...)



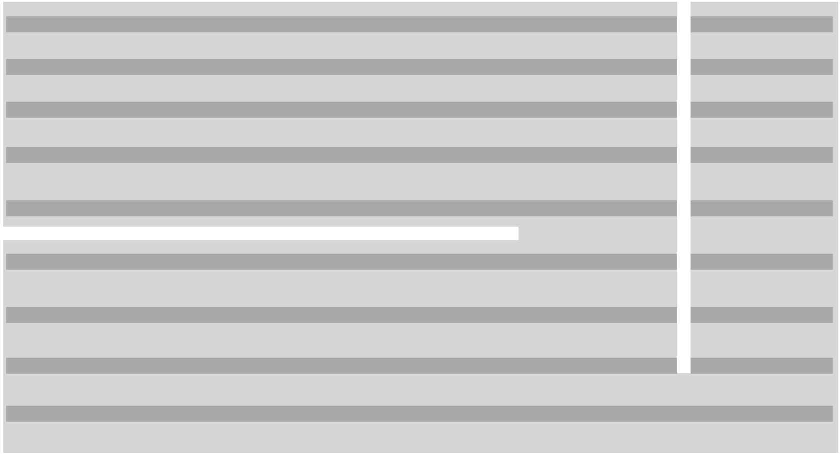
Conséquence

- nécessité d'une mesure "macroscopique" de l'énergie de surface intégrant toutes les sources de dissipation

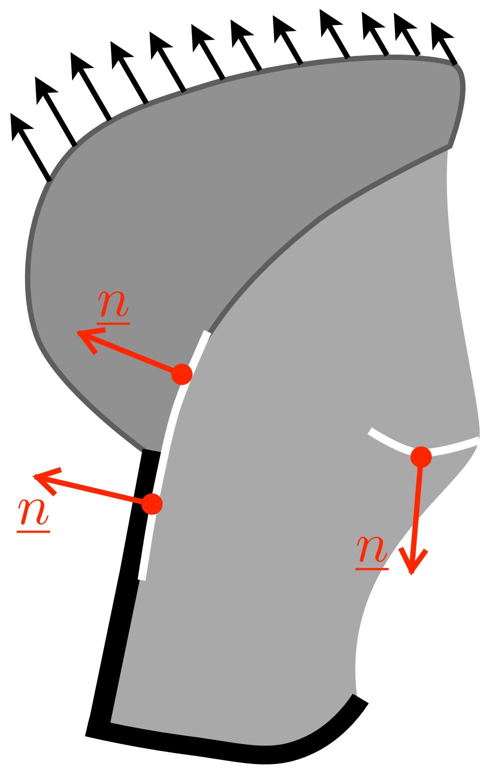
Extension aux matériaux anisotropes (bois, ...)

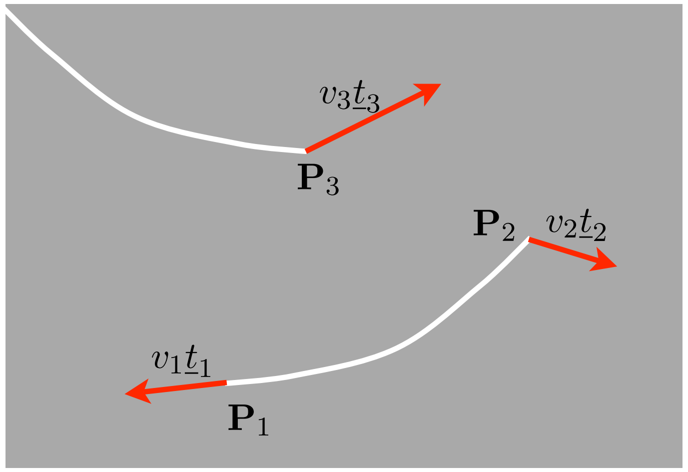
- la densité d'énergie de surface dépend de l'orientation

$$\boxed{G_c = G_c(\underline{n})}$$



Energie de surface et taux de création d'énergie de surface





L'énergie de surface

- cas général

$$\boxed{\mathcal{D}(\Gamma) = \int_\Gamma \mathsf{G_c}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))dS}$$

- milieu homogène isotrope

$$\boxed{\mathcal{D}(\Gamma) = \mathsf{G_c}\ \mathrm{aire}(\Gamma)}$$

Taux de création d'énergie de surface

- Définition

$$\boxed{\mathsf{D}' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{D}(\Gamma_h) - \mathcal{D}(\Gamma)}{\mathrm{aire}(\Gamma_h) - \mathrm{aire}(\Gamma)}}$$

- Exemples
  - en milieu homogène isotrope

$$\boxed{\mathsf{D}' = \mathsf{G_c}}$$

  - en 2D anisotrope et fissuration multiple

$$\boxed{\mathsf{D}' = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{G_c}(\mathbf{P}_i, \underline{n}_i)v_i, \quad 0 \leq v_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i = 1}$$

Le modèle de Griffith

- Les 3 principes du modèle
- Comparaison avec le critère d'Irwin

Les trois "principes" de la loi de Griffith

1. Irréversibilité

La fissuration ne peut que croître (à ne pas confondre avec le fait que certaines fissures peuvent être fermées)

$$\boxed{t \mapsto \Gamma(t) \text{ croissant (au sens de l'inclusion)}}$$

$$t' > t \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(t') \supset \Gamma(t)$$

2. Stabilité

À un niveau de chargement et un état de fissuration donnés, la structure est en équilibre instable s'il existe un "petit incrément virtuel" de fissuration tel que le taux de restitution d'énergie potentielle correspondant soit plus grand que le taux de création d'énergie de surface

$$\boxed{\text{état } \Gamma \text{ instable} \quad \Longleftarrow \quad \exists\, \delta\Gamma \; : \; \mathsf{G} > \mathsf{D}'}$$

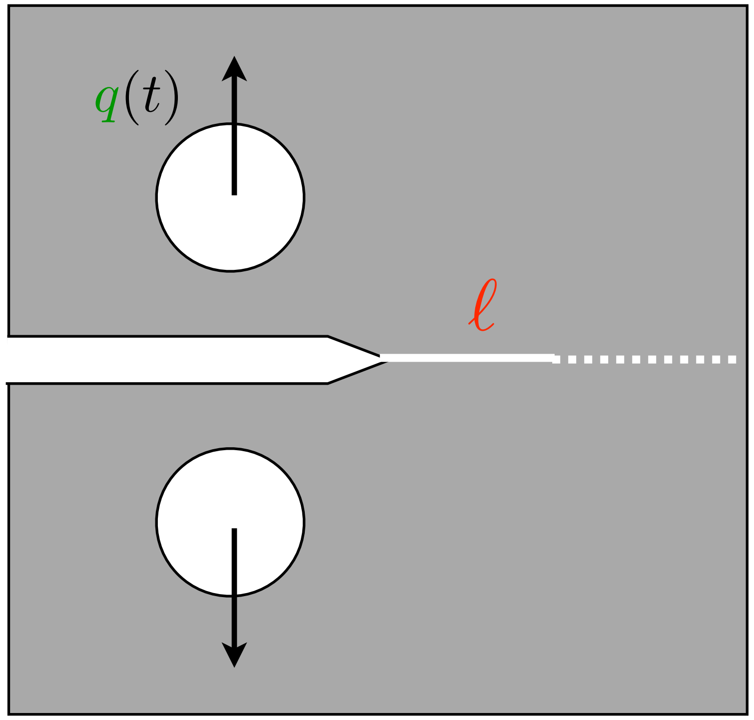
D'où la condition nécessaire de stabilité

$$\boxed{\text{état } \Gamma \text{ stable} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, \delta\Gamma \; : \; \mathsf{G} \leq \mathsf{D}'}$$

3. Bilan d'énergie

Durant toute évolution "contrôlée" de la fissuration, le taux de restitution d'énergie potentielle est égal au taux de création d'énergie de surface

Etat de fissuration ne dépendant que d'un paramètre



- Hypothèses
  - Trajet de fissuration donné
  - Fissure (2D ou 3D) dépendant d'un paramètre ℓ
  - Energies fonctions régulières de ℓ
  - Chargement dépendant du temps

- Loi de Griffith

$$\boxed{\dot{\ell} \geq 0, \qquad \mathsf{G} \leq \mathsf{G_c}, \qquad (\mathsf{G} - \mathsf{G_c})\dot{\ell} = 0}$$

loi à seuil (comme en plasticité)

Comparaison des critères d'Irwin et de Griffith

- Si matériau isotrope et fissure en mode I pur
  - les deux critères coïncident
  - on peut identifier G_c à l'aide de la formule d'Irwin et d'essais servant à mesurer la ténacité (éprouvette CT, éprouvette SENB)

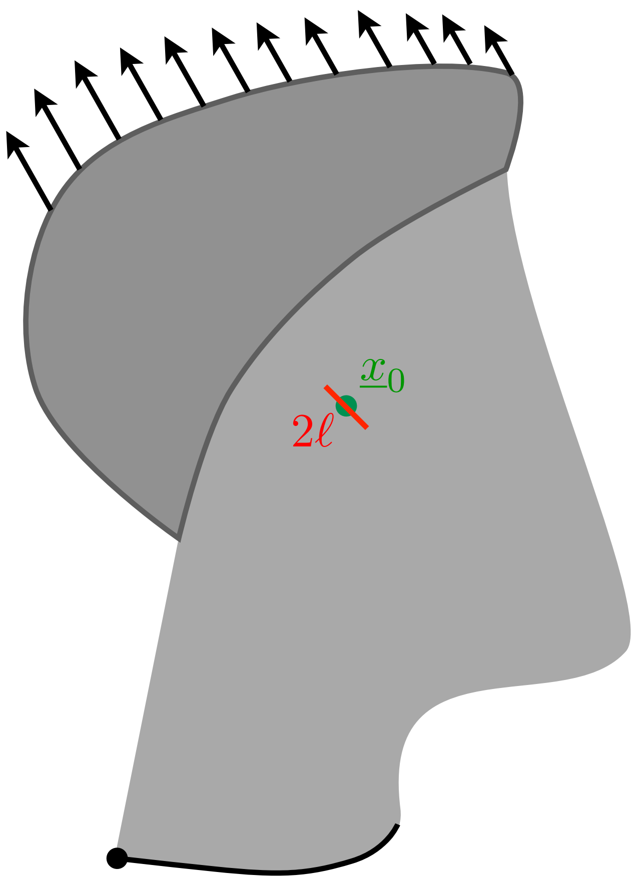
$$\boxed{G_c = \frac{1-\nu^2}{E} {K_{Ic}}^2}$$

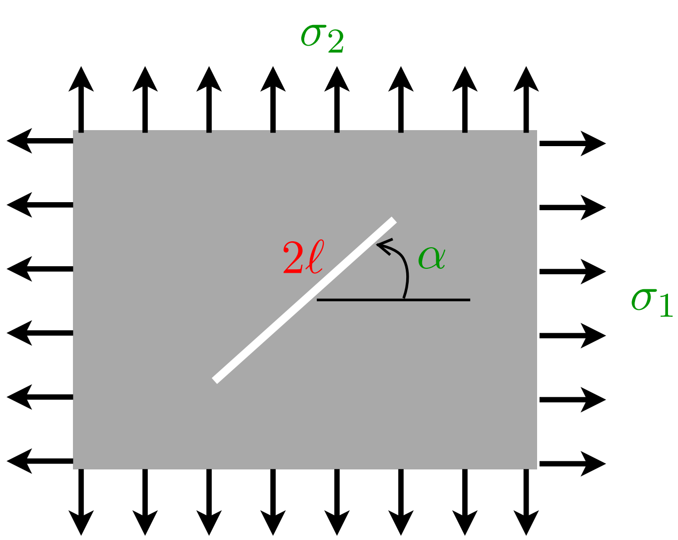
- Sinon : matériau anisotrope, fissure en mode mixte, fissure d'interface, ...
  - le critère d'Irwin est inapplicable
  - le critère de Griffith est toujours applicable (mais nécessité d'identifier G_c par des essais spécifiques dans le cas de matériau anisotrope ou de fissure d'interface)

Analyse critique
de la loi de Griffith

- Quelques propriétés générales
  - démarrage de la propagation de petites fissures
  - effets d'échelle
- Défauts de la loi de Griffith et comment les corriger
  - la création de fissures, les effets d'échelle et les forces cohésives
  - la fatigue et la loi de Paris

Démarrage et propagation des petites fissures





Cadre d'application (en 2D)

- fissure de longueur petite devant les longueurs structurelles (taille de la structure, longueur caractéristique du gradient des contraintes dans la structure saine, ...)

Calcul approché du taux de restitution d'énergie

1. Calcul des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ au point $\underline{x}_0$ en l'absence de fissure en ce point :

   $\boxed{(\underline{e}_1, \underline{e}_2) \text{ directions principales et } (\sigma_1, \sigma_2) \text{ contraintes principales de } \underline{\underline{\sigma}}}$;

2. Placement d'une petite fissure de longueur 2ℓ en $\underline{x}_0$ d'orientation α par rapport aux directions principales ;
3. La fissure ne perturbe que localement le champ de contraintes et les facteurs d'intensité des contraintes peuvent être approchés par ceux d'une fissure en milieu infini avec les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ à l'infini :

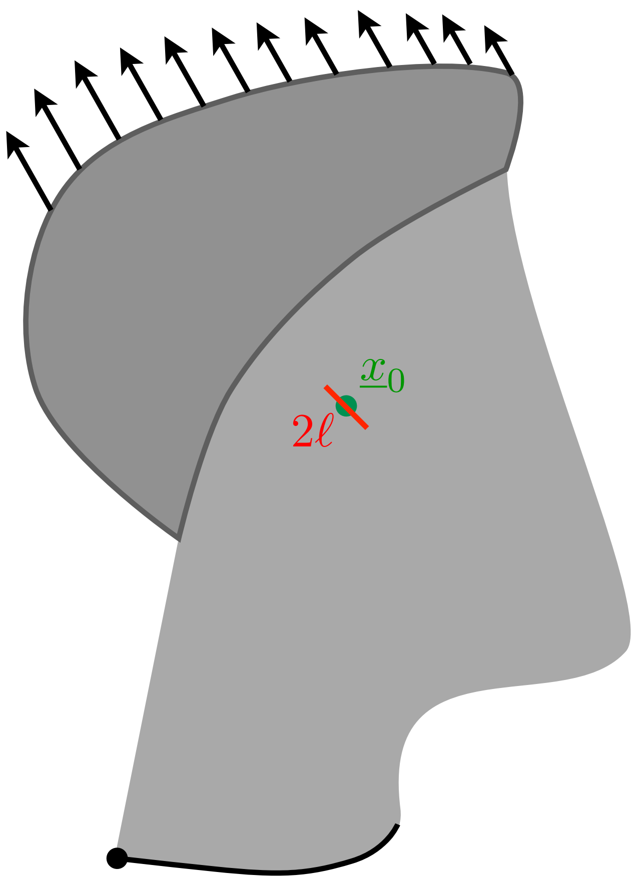
   $$\boxed{\mathsf{K}_{\mathsf{I}} = \sigma_{nn}^{+}\sqrt{\pi\ell}, \qquad \mathsf{K}_{\mathsf{II}} = \sigma_{nt}\sqrt{\pi\ell}}$$

   avec

   $$\sigma_{nn} = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha, \qquad \sigma_{nt} = (\sigma_2 - \sigma_1)\sin\alpha\cos\alpha$$

4. Utilisation de la formule d'Irwin :

   $$\boxed{\mathsf{G} = \frac{1-\nu^2}{E}\left({\sigma_{nn}^{+}}^2 + {\sigma_{nt}}^2\right)\pi\ell}$$



$$\mathsf{G} = \frac{1-\nu^2}{E}\left({\sigma^{+}_{nn}}^2 + {\sigma_{nt}}^2\right)\pi\ell$$

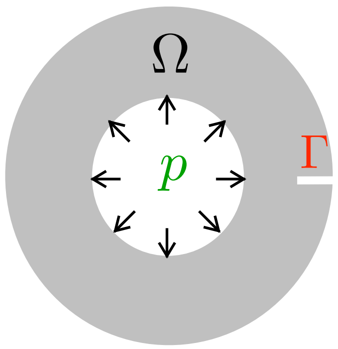
‣ Conséquence sur la propagation

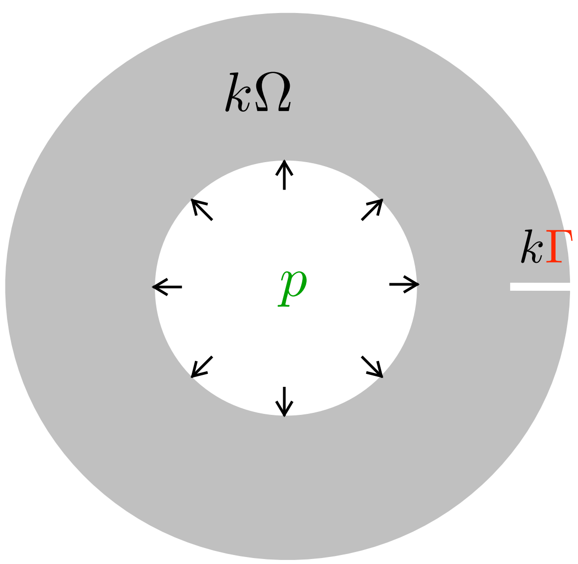
1. La fissure va commencer à se propager à un niveau de chargement qui est de l'ordre de $1/\sqrt{\ell}$ et donc d'autant plus grand que la fissure est petite ;
2. Comme G est une fonction croissante de ℓ à chargement fixé, la propagation est nécessairement instable au début ;
3. Ceci reste vrai tant que la fissure est suffisamment petite pour pouvoir calculer G par la méthode précédente.

Conclusion : les petites fissures ne présentent pas de danger
... tant qu'elles ne se propagent pas

Effets d’échelle

- Dépendance des grandeurs énergétiques vis à vis de la taille de la structure





- Hypothèses:
  - dimensions de la structure et des fissures dans un rapport k
  - même “pression”
  - même(s) matériau(x) élastiques
- Déplacements, déformations, contraintes à l’équilibre

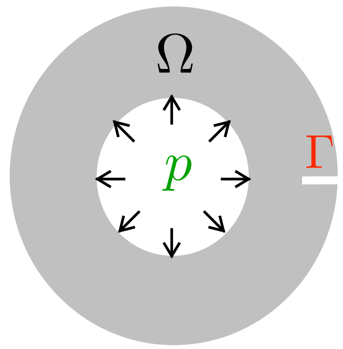
$$\begin{aligned}\underline{\xi}(k,p) &= kp\,\underline{\xi}(1,1)\\ \underline{\underline{\varepsilon}}(k,p) &= p\,\underline{\underline{\varepsilon}}(1,1)\\ \underline{\underline{\sigma}}(k,p) &= p\,\underline{\underline{\sigma}}(1,1)\end{aligned}$$

- Energie potentielle et taux de restitution d’énergie potentielle

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(k,p) &= k^3p^2\,\mathcal{P}(1,1)\\ \delta\mathcal{P}(k,p) &= k^3p^2\,\delta\mathcal{P}(1,1)\end{aligned}$$

- Energie de surface et taux de création d’énergie de surface

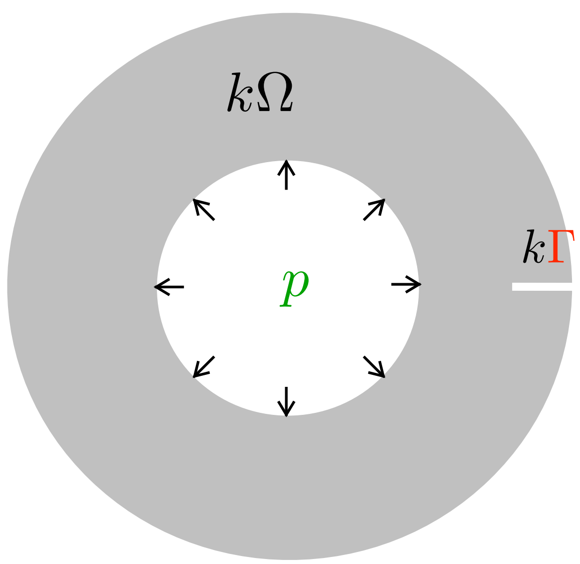
$$\begin{aligned}\mathcal{D}(k) &= k^2\,\mathcal{D}(1)\\ \delta\mathcal{D}(k) &= k^2\,\delta\mathcal{D}(1)\end{aligned}$$



- Dépendance de la charge de démarrage des fissures vis à vis de la taille de la structure

$p_c(1)$ est la valeur de p telle que $-\delta\mathcal{P}(1,p) = \delta\mathcal{D}(1)$

$$\boxed{p_c(1) = \sqrt{\frac{\delta\mathcal{D}(1)}{-\delta\mathcal{P}(1,1)}}}$$



$p_c(k)$ est la valeur de p telle que $-\delta\mathcal{P}(k,p) = \delta\mathcal{D}(k)$

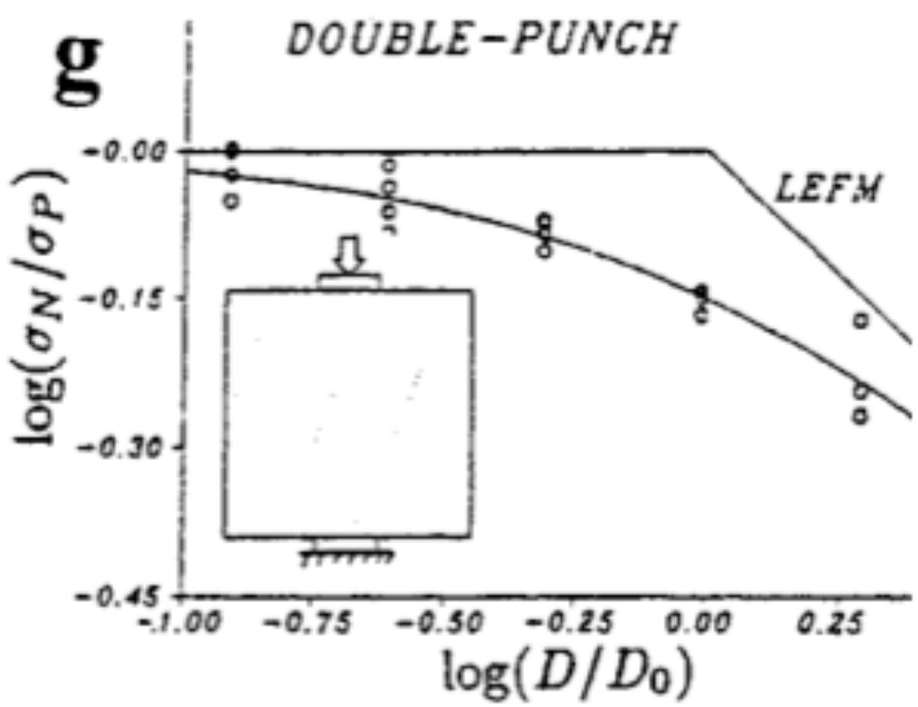
$$\boxed{p_c(k) = \sqrt{\frac{\delta\mathcal{D}(k)}{\delta\mathcal{P}(k,1)}}}$$

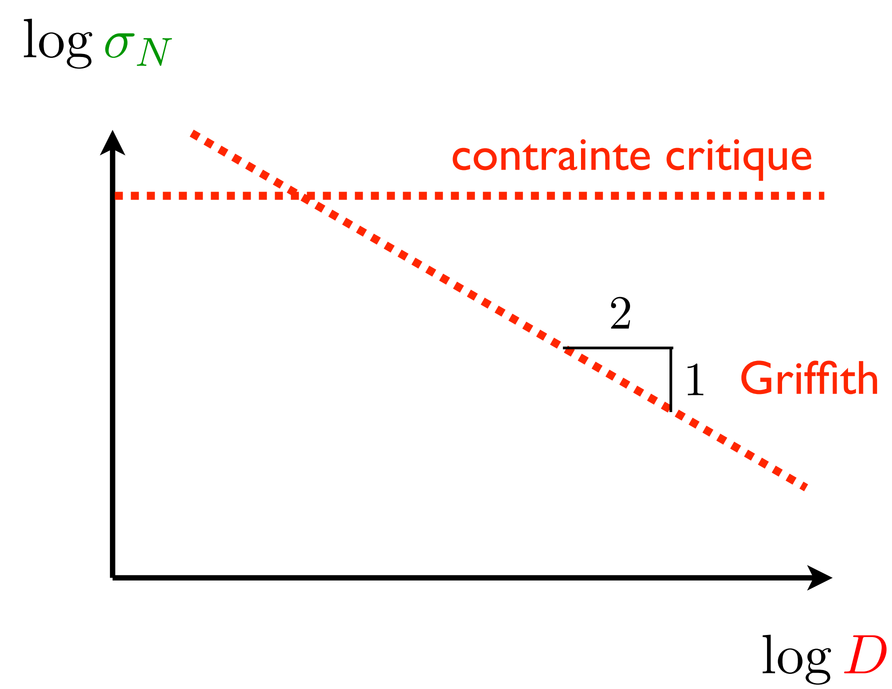
d'où l'effet d'échelle

$$\boxed{p_c(k) = \frac{p_c(1)}{\sqrt{k}}}$$

- Comparaison avec l’expérience

- effet d’échelle pertinent aux grandes échelles
- effet d’échelle différent aux petites échelles

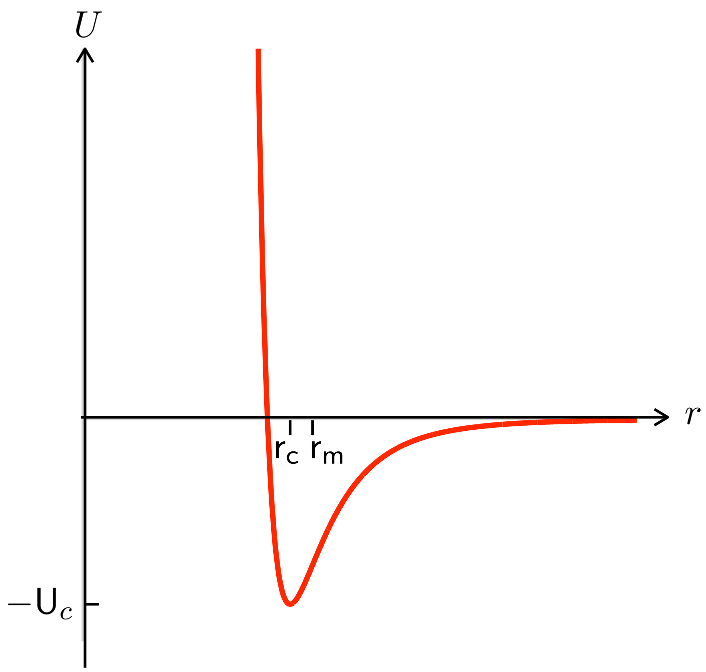


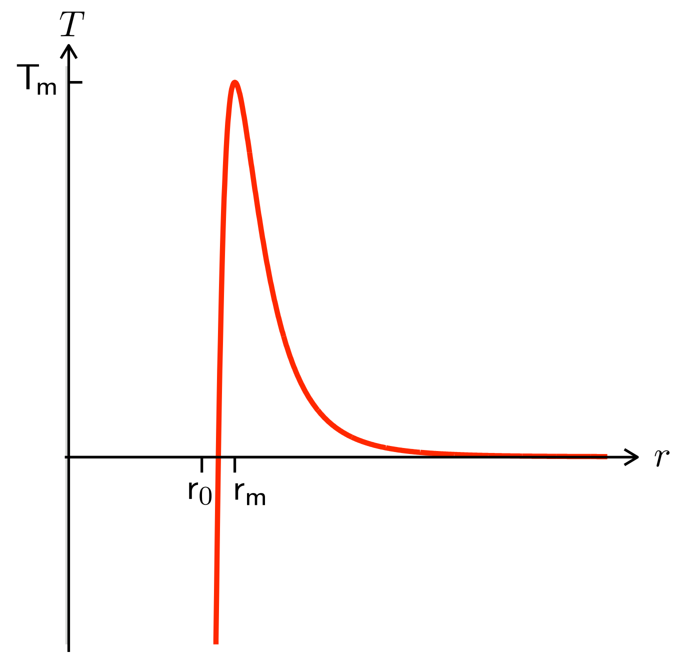


Les défauts de la loi de Griffith et comment les corriger

- la création de fissures et les forces cohésives
- la fatigue et la loi de Paris

Les forces cohésives





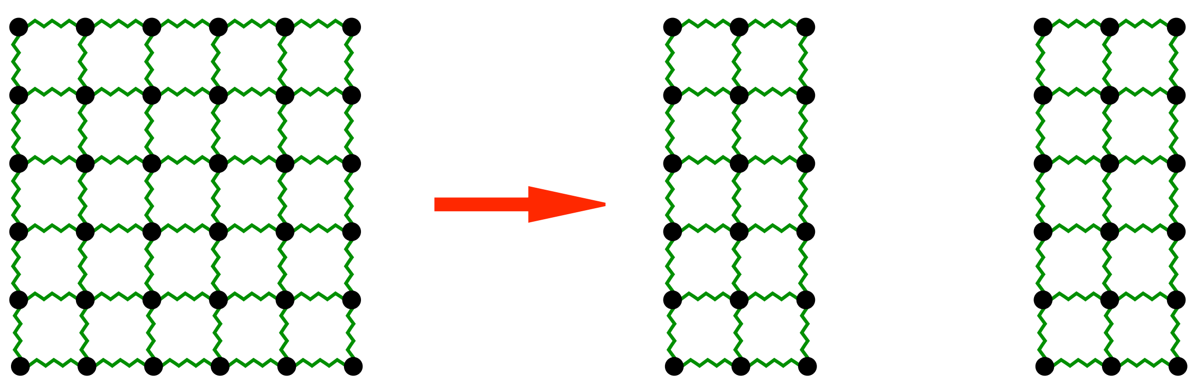
L'origine physique

- potentiels interatomiques

$$U(r) = 4\mathrm{U_c}\left(\left(\frac{\mathrm{r_0}}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\mathrm{r_0}}{r}\right)^{6}\right)$$

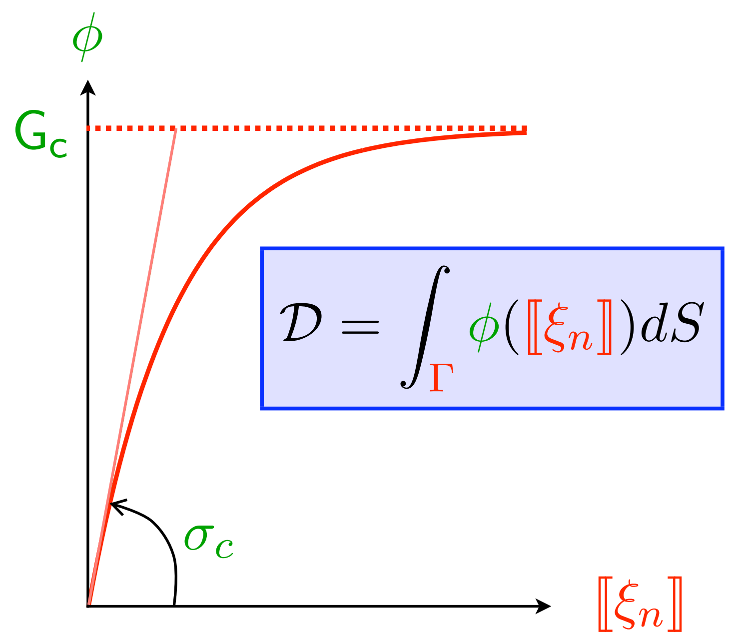
$$T(r) = -U'(r) = \frac{24\mathrm{U}_c}{r}\left(\left(\frac{\mathrm{r_0}}{r}\right)^{6} - 2\left(\frac{\mathrm{r_0}}{r}\right)^{12}\right)$$

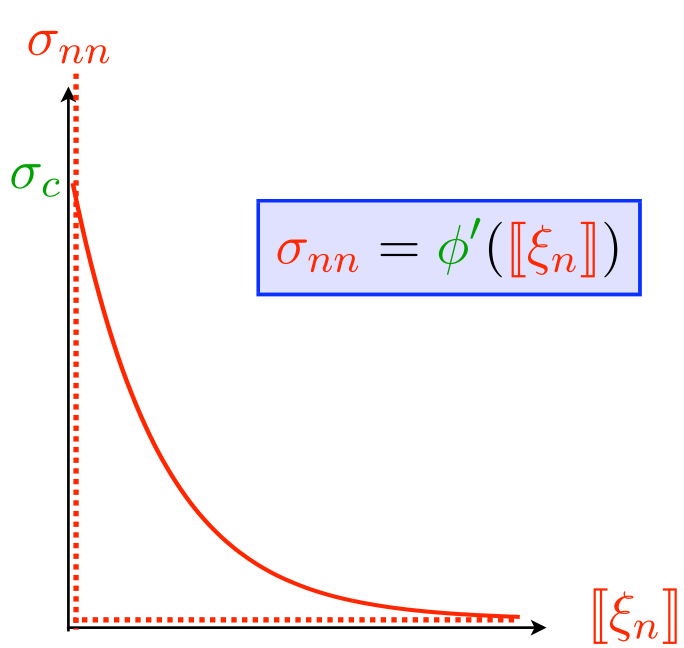
- interaction (attractive) tant que les atomes ne sont pas suffisamment éloignés



- prise en compte nécessaire lors de la création de fissures ou en pointe de fissure existante

Les modèles phénoménologiques





- nécessité :

  les potentiels interatomiques sont qualitativement mais pas quantitativement corrects

- ingrédients (en mode I) :

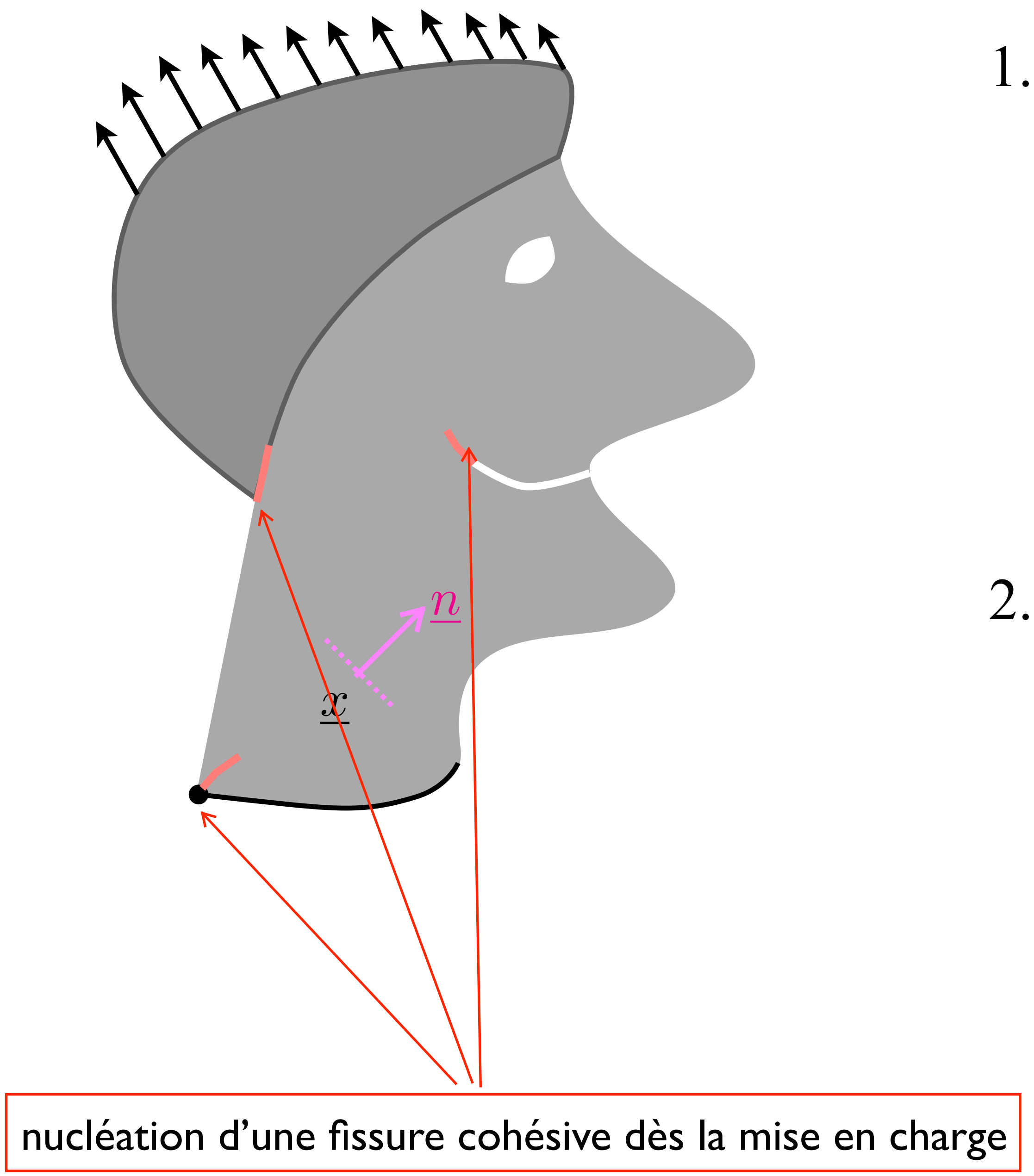
1. faire dépendre la densité d'énergie de surface du saut de déplacement normal
2. prendre une densité d'énergie de surface ayant les propriétés suivantes

   (i) nulle quand le saut de déplacement normal est nul

   (ii) croissante et tendant asymtotiquement vers G_c

   (iii) concave
3. les forces cohésives (contraintes normales de traction) sont la dérivée de la densité d'énergie de surface par rapport au saut de déplacement

   - conséquences :
4. les forces cohésives sont des fonctions décroissantes du saut de déplacement normal
5. la contrainte $\sigma_c=\phi'(0)$ joue le rôle de contrainte critique
6. le rapport G_c/σ_c est une longueur caractéristique



- Les corrections apportées

1. Introduction d'une contrainte critique σ_c (traction maximale) caractéristique du matériau

$$\boxed{\sigma_{nn}(\underline{x}) \leq \sigma_c(\underline{x}), \quad \forall \underline{x}, \forall \underline{n}}$$

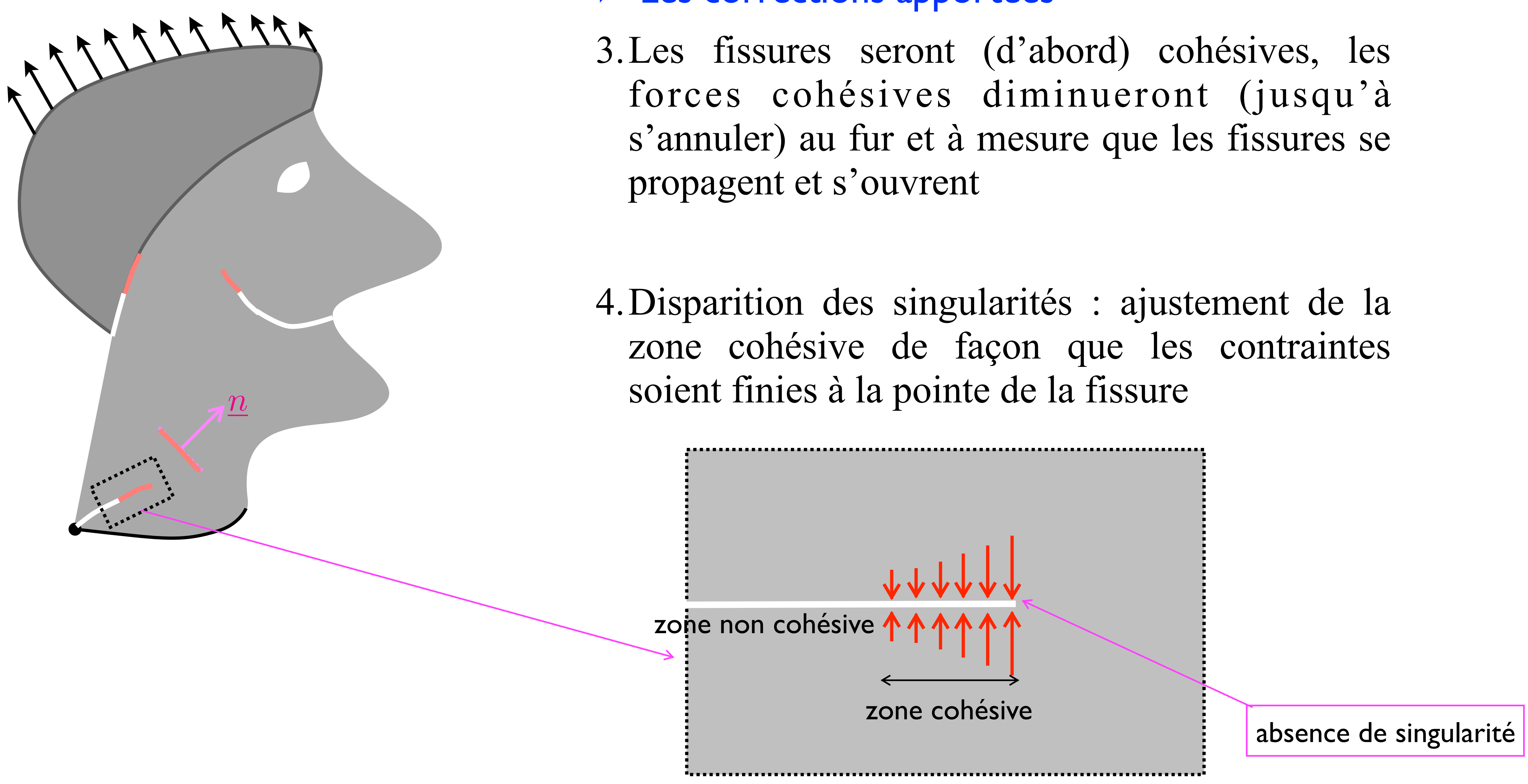
$$\Longleftrightarrow \qquad \boxed{\max_i \sigma_i(\underline{x}) \leq \sigma_c(\underline{x}), \quad \forall \underline{x}}$$

2. Création de fissures dès que le critère en contrainte est atteint. Par conséquent, il y a nucléation d'une fissure en un point singulier dès la mise en charge

Les corrections apportées

3. Les fissures seront (d'abord) cohésives, les forces cohésives diminueront (jusqu'à s'annuler) au fur et à mesure que les fissures se propagent et s'ouvrent

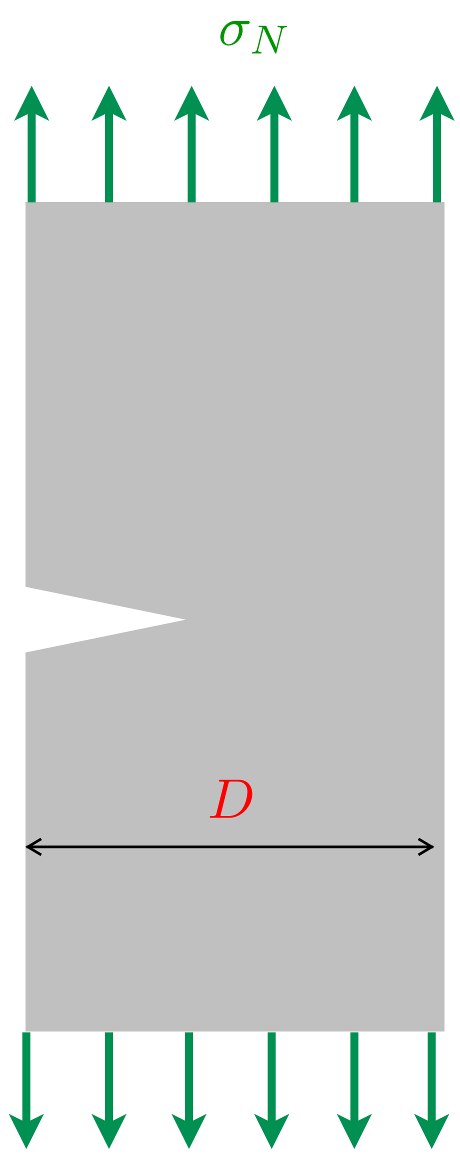
4. Disparition des singularités : ajustement de la zone cohésive de façon que les contraintes soient finies à la pointe de la fissure

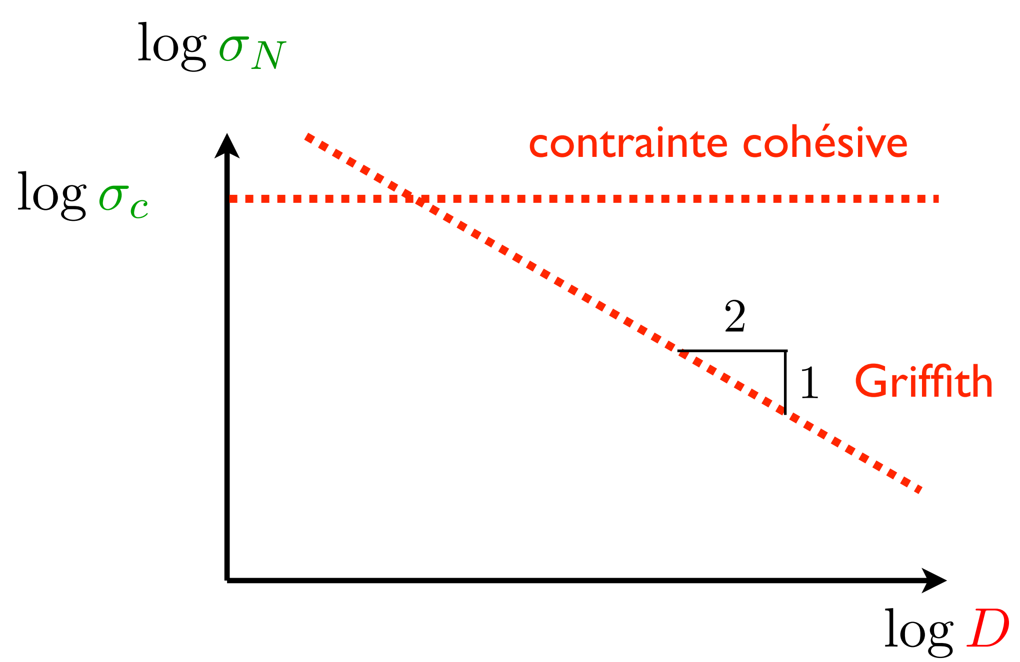


- Les corrections apportées

5. Amélioration des effets d'échelle

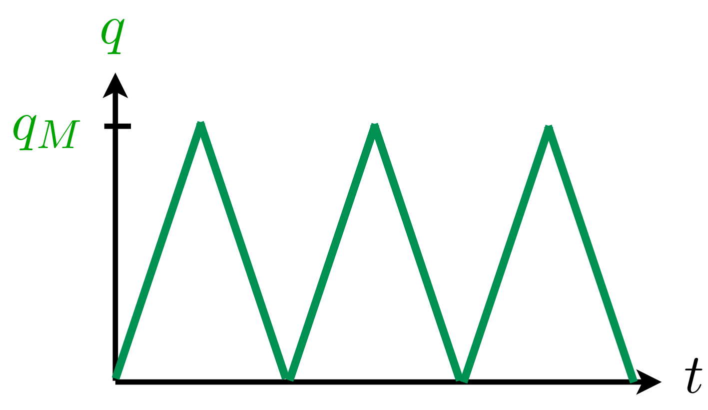
1. On retrouve les effets d'échelle de Griffith pour des grandes structures et des grandes fissures
2. On corrige les effets d'échelle pour des petites structures ou des fissures naissantes



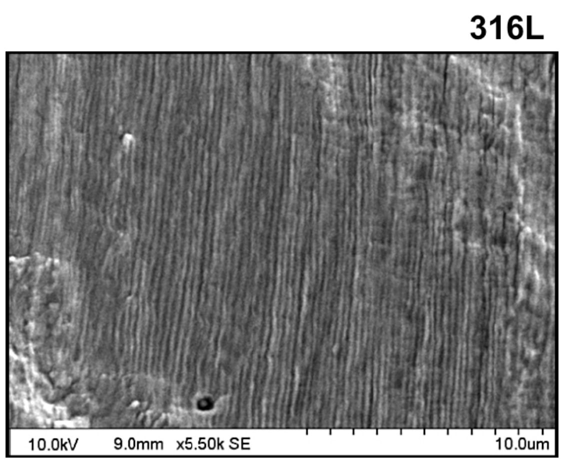


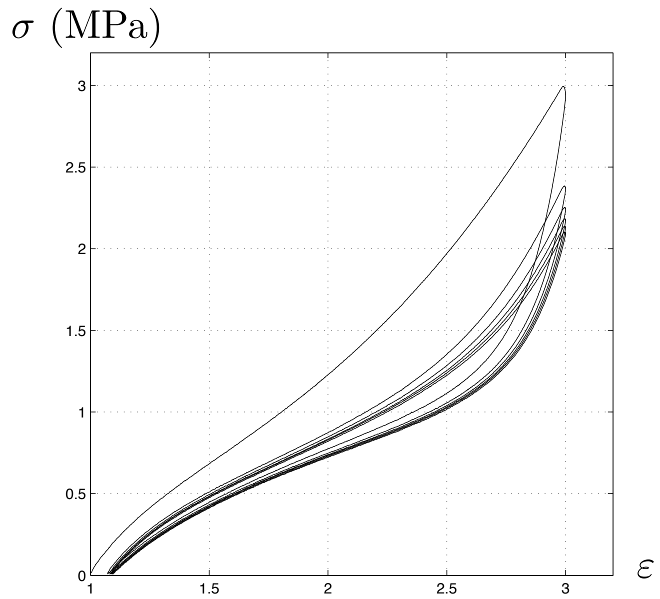
La fatigue

- Le phénomène de fatigue



- propagation progressive des fissures sous chargement cyclique (non monotone) bien en deçà de la charge critique prévue par la loi de Griffith
- mécanismes microscopiques différents
- accumulation de “défauts” négligeables à court terme ou sous chargement monotone, mais visibles à long terme ou après un grand nombre de cycles
- phénomène visible aussi dans des essais sur éprouvette lisse dans un diagramme contrainte-déformation

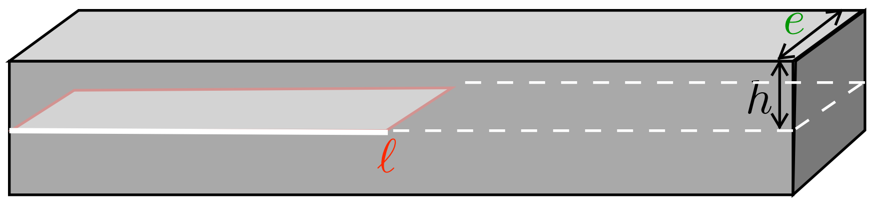


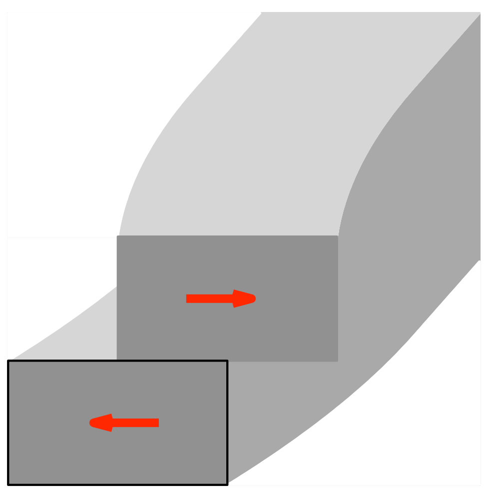


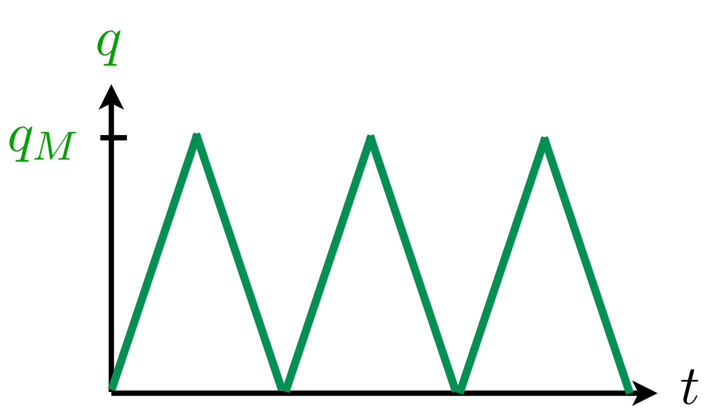
La fatigue

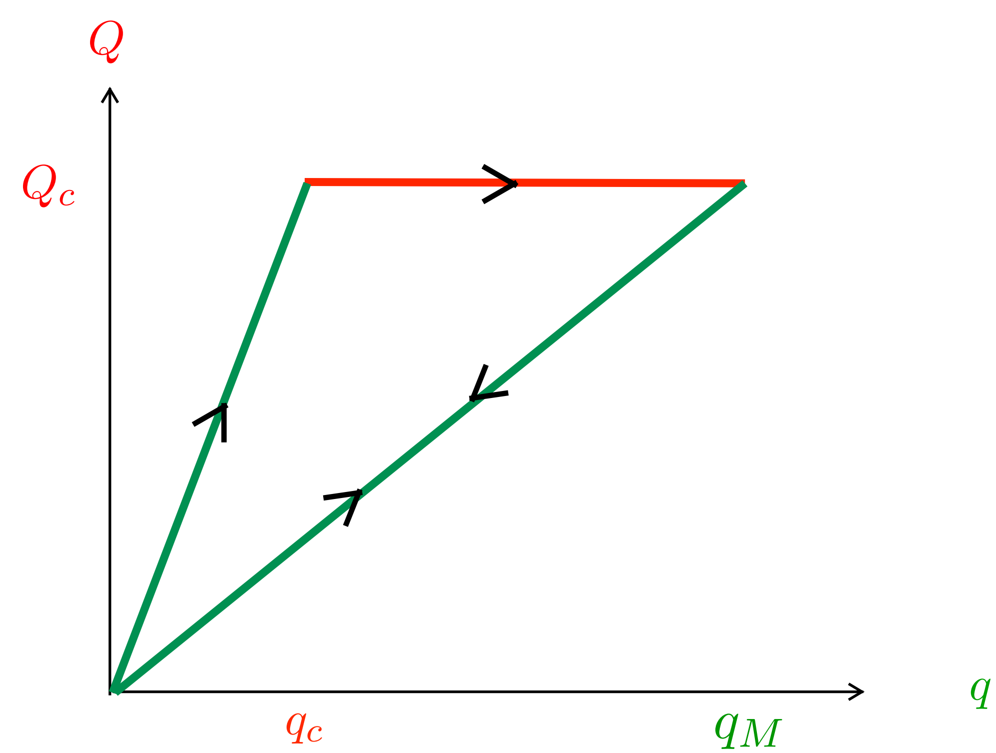
- L'incapacité de la loi de Griffith à en rendre compte

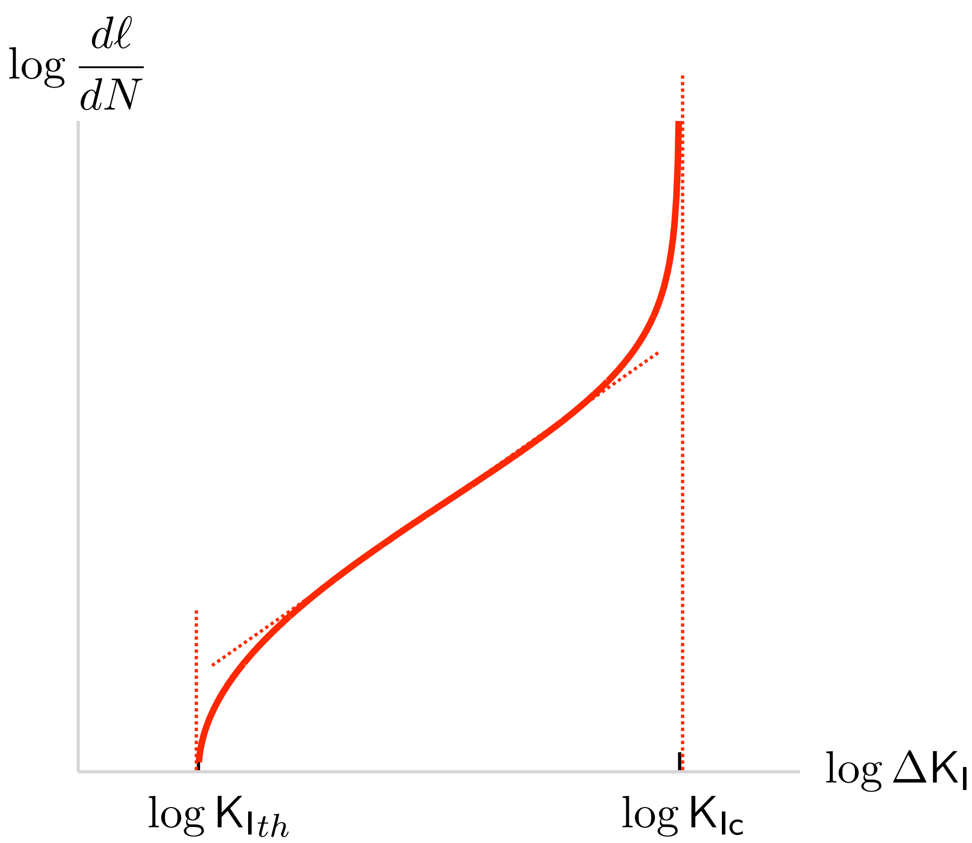
- si l'amplitude du cycle est trop faible, alors la fissure ne se propage pas
- sinon, elle se propage au cours du premier cycle, mais ne se propage plus après

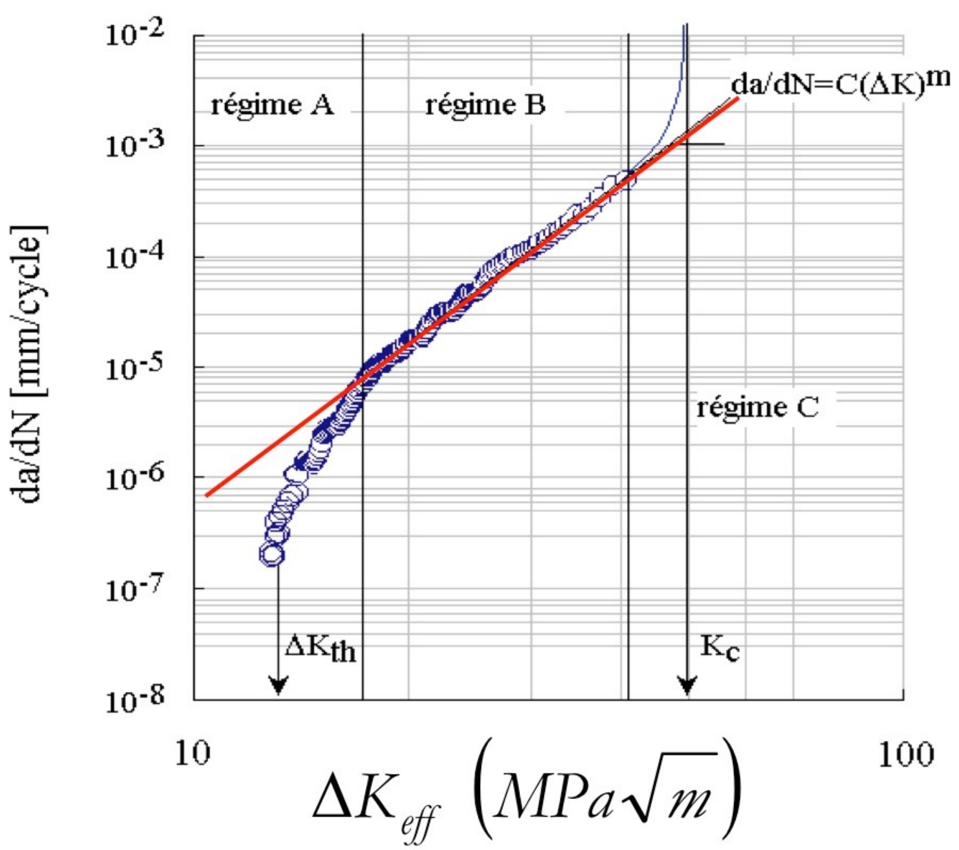












Les modèles phénoménologiques

- Résultats expérimentaux:

pour une fissure soumise à un chargement cyclique "simple" en mode I, la loi de fatigue est de la forme

$$\boxed{\frac{d\ell}{dN} = f(K_I)}$$

- Les différentes régimes de la loi de fatigue:

(I) régime d'endurance (pas de propagation en dessous d'un certain seuil de K_I)

(II) régime de la loi de Paris

$$\boxed{\frac{d\ell}{dN} = \dot{\ell}\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^m}$$

K_{Ic} : ténacité
$\dot{\ell}$, m : constantes matériaux

(III) régime de la fatigue oligocyclique (valeurs de K_I proche de la ténacité, propagation de la fissure importante à chaque cycle)