

NOUVEAU MODELE D'APPROCHE LOCALE POUR LA RUPTURE DUCTILE CYCLIQUE

Almahdi Remmal^{a,b}, Jean-Baptiste Leblond^a, Stéphane Marie^b

a. Sorbonne Université, Université Pierre-et-Marie-Curie (UPMC), CNRS, UMR 7190, Institut Jean-Le-Rond-d'Alembert, Tour 65-55, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France. jbl@lmm.jussieu.fr (J.-B. Leblond)

b. Framatome, Tour Areva, 1 place Jean Millier, 92084 La Défense cedex, France almahdi.remmal@framatome.com (A. Remmal), stephane.marie@framatome.com (S. Marie)

Mots clés : Rupture ductile cyclique, Modèle de Gurson, Chargements cycliques, Effet de rochet de la porosité, Simulations micromécaniques.

Résumé

L'influence du type de chargement, monotone ou cyclique, sur la rupture ductile a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois il y'a 25 ans. Cette réduction a été décrite comme étant la conséquence de l'augmentation de la porosité moyenne sur un cycle avec le nombre de cycles (effet de rochet de la porosité). L'objectif de cet article est de proposer un nouveau modèle d'approche locale qui permet de modéliser l'importante réduction de ductilité engendrée par le caractère cyclique du chargement. Cela est fait, dans un premier temps, en validant un nouveau modèle de type Gurson incluant les écrouissages de type isotrope et cinématique par l'intermédiaire de calculs micromécaniques. Dans un second temps, une amélioration de l'équation du taux de porosité pour un matériau élasto-plastique est proposée en introduisant une correction à la dérivée objective de Jaumann. Les principales conclusions de ces travaux sont que l'effet de rochet de la porosité, qui dépend fortement de la triaxialité, est un phénomène majeur dans la modélisation de la rupture ductile cyclique et que l'élasticité joue un rôle aussi important que l'écrouissage dans la modélisation de ce phénomène.

Nomenclature

$\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\Sigma}}$	Tenseur des contraintes de Cauchy respectivement microscopique et macroscopique
$\underline{\underline{X'}}$	Déviateur du tenseur $\underline{\underline{X}}$
X_m	$\frac{1}{3} tr(\underline{\underline{X}})$
$\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{D}}$	Taux de déformation totale respectivement microscopique et macroscopique
$\underline{\underline{\omega}}$	Taux de rotation microscopique
λ, μ, E, ν	Coefficients de Lamé, Module d'Young et coefficient de Poisson
λ_c, μ_c	Coefficients de Lamé macroscopique corrigés en prenant en compte la porosité
$ X $	Volume de X

1. Introduction

Le sujet de la rupture ductile sous chargement cyclique a été abordé pour la première fois dans les années 90 dans le cadre du programme IPIRG qui s'est appuyé sur des essais cycliques sur éprouvettes Compact Tension (CT) et de flexions alternées sur tubes fissurées. Les résultats ont mis en évidence une influence importante du type de chargement sur la rupture ductile, le chargement cyclique entraînant une réduction importante de la ductilité de la structure.

Cette réduction a un impact majeur sur le comportement à la déchirure dans les composants de type tuyauterie soumis à des chargements cycliques, comme les séismes. La prédiction correcte de ce comportement constitue un enjeu important et un défi difficile pour l'industrie. En effet, les modèles prédictifs de la rupture ductile sous chargement cyclique sont peu nombreux. On en distingue deux types : ceux fondés sur des analyses globales des énergies mises en jeu lors de la propagation d'une fissure, et ceux reposant sur des approches locales des mécanismes élémentaires de la rupture ductile en lien avec les théories d'homogénéisation du comportement mécanique.

Nous nous intéressons dans cet article aux modèles d'approches locales et donc aux mécanismes de la rupture ductile qui engendrent l'endommagement du matériau et l'apparition de fissures. L'analyse micromécanique des mécanismes de rupture ductile sous chargements cyclique a commencé en 1992 par des calculs par éléments finis de Gilles et al [1] simulant la microstructure poreuse soumise à un chargement cyclique sous triaxialité des contraintes constante en valeur

absolue. Ces calculs ont mis en évidence un phénomène appelé effet de rochet de la porosité correspondant à augmentation graduelle avec le nombre de cycles de la valeur moyenne de la porosité au cours d'un cycle. Ce phénomène est un bon candidat à l'explication de la réduction observée de la ductilité sous chargement cycliques. Les conclusions de Gilles et al [1] ont été rapidement confirmées par de nombreux travaux ([2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]). Comme expliqué par Devaux et al [2], l'effet de rochet de la porosité est fondamentalement lié à deux caractéristiques du matériau : l'élasticité et l'écroûissage. Il n'y a aucun effet pour un matériau rigide-parfaitement plastique. Ces travaux ont aussi montré que le modèle classique de Gurson [9] ne permet pas de prédire l'effet de rochet de la porosité, l'évolution de la porosité étant stabilisée dès le premier cycle. Ce manque du modèle découle directement de la manière dont l'écroûissage a été introduit dans le critère et plus spécifiquement dans le fait que l'écroûissage est pris en compte par une seule et même variable $\bar{\sigma}$ dans le critère.

Plusieurs travaux théoriques ont été menés pour améliorer la prise en compte de l'écroûissage dans le modèle de Gurson. Pour l'écroûissage isotrope, on peut noter le modèle LPD [10], ensuite amélioré [8], qui élimine l'hypothèse de déformation positivement proportionnelle en introduisant une discrétisation radiale de la cellule élémentaire sphérique en N couches sphériques concentriques et en calculant les variables d'écroûissage dans chacune de ces couches. Cette idée de discrétiser la cellule élémentaire en plusieurs sphères concentriques a été reprise par Morin et al [11] pour proposer un nouveau modèle de Gurson prenant en compte l'écroûissage isotrope et cinématique et basé sur l'analyse limite séquentielle. De ce fait, l'effet de l'élasticité est négligé dans le modèle bien que son impact dans le comportement du matériau soit aussi important que celui de l'écroûissage comme évoqué récemment par Cheng et al [12].

L'objectif de cet article est de présenter un nouveau modèle d'approche locale adapté à la rupture ductile cyclique incluant l'écroûissage et l'élasticité. Il est organisé comme suit :

- Le paragraphe 2 présente succinctement le modèle de Morin et al [11], qui permet d'introduire l'écroûissage cinématique et isotrope dans le modèle de Gurson en se basant sur l'analyse limite séquentielle d'une cellule élémentaire sphérique discrétisée en plusieurs sphères concentriques.
- Le paragraphe 3 valide les prédictions de ce modèle en les comparant à des simulations micromécanique d'un matériau rigide écroûissable. On montrera dans ce paragraphe l'impact majeur que peut avoir l'élasticité dans l'effet de rochet de la porosité.
- Le paragraphe 4 présentera une approche heuristique pour introduire l'élasticité dans le modèle présenté au paragraphe 2 à l'aide de l'équation du taux de porosité où les déformations élastiques sont prises en compte, et la validation des hypothèses faites par comparaison aux résultats de simulations micromécaniques.

2. Un modèle de Gurson incluant l'écroûissage isotrope et cinématique

2.1 Analyse limite séquentielle

L'analyse limite séquentielle ([13], [14], [15]) permet d'étendre les résultats de l'analyse limite classique en incorporant les effets d'écroûissages et le cadre des grands déplacements et grandes déformations. Cette possibilité se révèle essentielle pour les problèmes nécessitant l'étude des effets de la plasticité. En se basant sur les mêmes « procédures » que celles de l'analyse limite classique, notamment l'approche cinématique, elle se révèle simple d'utilisation et puissante.

L'analyse limite séquentielle consiste à considérer un matériau rigide et écroûissable comme une succession de matériaux rigide plastique-parfait. A chaque instant les précédentes variables d'écroûissages, considérées comme étant momentanément fixées, permettent de modifier le critère de plasticité et la loi de normalité. Dès lors, à l'aide des outils de l'analyse limite classique, un critère de plasticité actualisé et la loi de normalité associée peuvent être définis. Enfin, la géométrie et les variables d'écroûissages peuvent être mises à jour *a posteriori* à l'aide des champs de vitesse tests choisis pour l'analyse limite.

Malgré l'utilité de cette approche, on peut noter un désavantage majeur. En effet, contrairement à l'analyse limite classique, l'analyse limite séquentielle ne s'applique qu'en absence d'élasticité. Evidemment, cette hypothèse n'est en pratique jamais vérifiée, mais peut-être approximativement considéré lorsque le couplage entre élasticité et plasticité joue un rôle mineur.

2.2 Positionnement du problème

Pour obtenir la loi constitutive macroscopique du matériau poreux, on considère comme l'a fait Gurson, une cellule élémentaire sphérique Ω contenant une cavité sphérique ω concentrique, la cellule étant discrétisée en N couches sphériques concentriques de rayon r_i pour i allant de 1 à N . La porosité, correspondant à la fraction volumique de vide dans la cellule, est donc définie par $f = \frac{|\omega|}{|\Omega|} = \frac{a^3}{b^3}$ où a est le rayon de la cavité et b le rayon externe de la cellule élémentaire. Le matériau constitutif est considéré comme étant rigide plastique (pas d'élasticité) et présente un écrouissage mixte, isotrope et cinématique. Ce matériau obéit au critère :

$$\begin{cases} \phi(\underline{\underline{\sigma}}) = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\alpha}})_{eq}^2 - \bar{\sigma}^2 \leq 0, & (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\alpha}})_{eq}^2 = \frac{3}{2} (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\alpha}}) : (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\alpha}}) \\ \underline{\underline{d}} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) = 3\lambda (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\alpha}}), & \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Où toutes les quantités dépendent de la position actuelle x . Les hypothèses concernant les équations d'évolutions sont présentées de manière exhaustive dans le papier de Morin et al [11].

La cellule est soumise à des conditions de déformations homogènes au bord, et le champ de vitesse considéré pour mener l'analyse limite est le champ de vitesse incompressible de Gurson [9].

2.3 Un modèle de Gurson incluant l'écrouissage isotrope et cinématique

L'ensemble de la procédure d'analyse limite est présentée dans l'article de Morin et al [11]. Deux hypothèses sont faites afin de calculer les contributions isotrope et cinématique de la dissipation plastique macroscopique. Pour la contribution isotrope, on fait l'hypothèse que la limite élastique dans chaque couche i de la sphère $\bar{\sigma}^i$ est calculée au centre de la couche. Pour la contribution cinématique nous faisons l'hypothèse que dans chaque couche i de la sphère, la variable cinématique $\underline{\underline{\alpha}}^i$ est de la forme (supposée compatible avec la loi d'écrouissage cinématique considérée) :

$$\underline{\underline{\alpha}}^i = \underline{\underline{A}}_1^i + A_2^i (-2\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta + \underline{\underline{e}}_\varphi \otimes \underline{\underline{e}}_\varphi) \quad (2)$$

Où $\underline{\underline{A}}_1^i$ est un tenseur déviatorique constant et A_2^i une constante.

A l'aide de ces hypothèses, les équations paramétriques du critère de plasticité sont obtenues. On en déduit en faisant le lien avec le modèle de Leblond et al [10] le critère macroscopique explicite suivant

$$\phi(\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{(\underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{A}}_1)_{eq}^2}{\Sigma_1^2} + 2qf \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m - A_2}{\Sigma_2}\right) - 1 - (qf)^2 \leq 0 \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \frac{1}{1-f} \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}^i (f_{i+1} - f_i) & \underline{\underline{A}}_1 = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{A}}_1^i (f_{i+1} - f_i) \\ \Sigma_2 = \frac{-1}{\ln f} \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}^i \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} & A_2 = \sum_{i=1}^N 2A_2^i \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} \end{cases} \quad (4)$$

$$f_i = \frac{r_i^3}{b^3} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5)$$

Ainsi, l'écrouissage isotrope est pris en compte à l'aide de deux paramètres Σ_1 et Σ_2 et l'écrouissage cinématique à l'aide du tenseur $\underline{\underline{A}}_1$ et du paramètre A_2 . L'ensemble de ces paramètres macroscopiques étant calculé par le biais d'une intégration sur les couches de la sphère élémentaire.

3. Comparaison des prédictions du modèle avec des simulations micromécaniques de croissance de la porosité sous chargements cycliques

3.1 Contexte des calculs

Des simulations micromécaniques par éléments finis ont été réalisées pour valider les prédictions du modèle présenté au paragraphe 2. Afin d'être le plus en accord possible avec les hypothèses considérées pour obtenir le

modèle, une géométrie sphérique plutôt que cubique a été choisie pour ces simulations. La porosité des cellules élémentaires a été fixée à $f_0 = 0,001$. Celles-ci soumises à un chargement cyclique respectant les conditions de déformations homogènes au bord, où la déformation est ajustée pour que la triaxialité soit fixée en valeur absolue au cours des cycles.

L'amplitude des cycles est contrôlée par la déformation totale équivalente algébrique dont la valeur croît lors d'un demi-cycle de traction et décroît lors d'un demi-cycle de compression. Celle-ci est définie par :

$$\bar{E}_{eq} = \int_0^t \text{sgn}(\Sigma_m(\tau)) D_{eq}(\tau) d\tau \tag{6}$$

Des simulations pour différents types d'écroissages et différentes déformations ont été réalisées : un écroissage isotrope, un écroissage cinématique linéaire, un écroissage cinématique non-linéaire de type Armstrong-Frederick avec un ou deux centres et un écroissage mixte de type Chaboche. La valeur du module d'Young a été augmentée à 1 500 GPa pour éliminer artificiellement l'effet de l'élasticité. Seule une partie des résultats sont présentés ci-dessous, pour une déformation totale équivalente algébrique maximale \bar{E}_{eq}^{max} de 10%.

3.2 Matériau rigide-isotrope

La loi de comportement de la matrice est celle d'un acier ferritique A508 Cl 3. (Fig. 1). Les calculs pour cette loi de comportement sont similaire à ceux de Lacroix et al [8] pour une triaxialité $T = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}$ fixée en valeur absolue à 3. La valeur du paramètre q varie en fonction de la triaxialité comme expliqué dans Leblond et Morin.

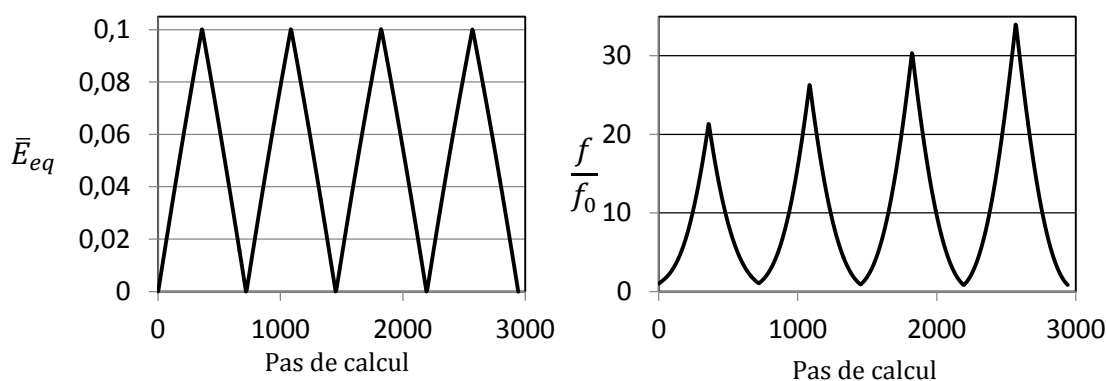


Figure 2.a : Evolution déformation totale équivalente Figure 2.b : Evolution de la porosité normalisée

L'évolution de la déformation totale algébrique équivalente en fonction du temps (Fig. 2.a) et celle de la porosité normalisée f/f_0 (Fig 2.b) explicitent l'effet de rochet de la porosité. Pour des cycles de même amplitude, la valeur de la porosité croît au cours des cycles. En éliminant le temps entre ces deux représentations, nous obtenons la courbe de la porosité normalisée en fonction de la déformation totale équivalente algébrique (Fig. 3). Sur la Figure 3, les résultats de la simulation micromécanique sont présentés en trait plein et les prédictions du modèle par des symboles.

Pour un écroissage isotrope, les résultats obtenus sont satisfaisant tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif. L'effet de rochet de la porosité est bien modélisé et les valeurs obtenues sont cohérentes avec celle obtenues par simulation micromécanique. Ces résultats viennent confirmer ceux obtenus par le modèle de Lacroix et al [8] dédiée à l'écroissage isotrope.

3.3 Matériau rigide-cinématique linéaire

La matrice présente ici un écroissage cinématique linéaire dont la pente est $C = 1500 MPa$. Comme observé en Figure 3, il n'y a pas de rochet de la porosité pour ce type d'écroissage, mais plutôt une évolution de la porosité en « forme de cloche » que le modèle arrive à reproduire de manière satisfaisante.

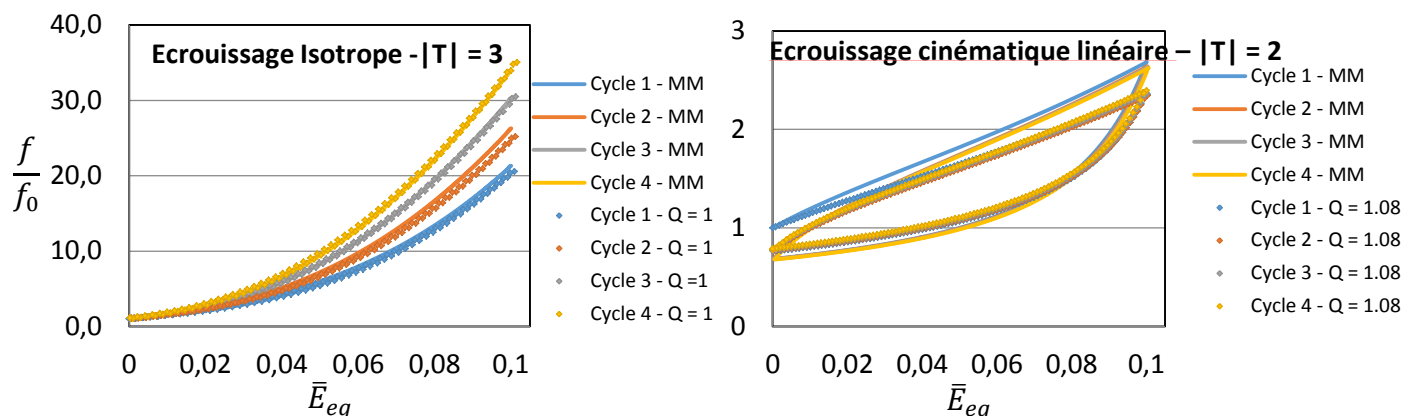


Figure 3 : Evolution de la porosité normalisée en fonction de la déformation totale équivalente algébrique

3.4 Matériau rigide-mixte

La matrice présente ici un écrouissage mixte isotrope et cinématique non-linéaire. La loi de comportement totale est la même que celle prise pour l'écrouissage isotrope et nous avons considéré deux centres cinématiques qui respectent la loi non-linéaire d'Armstrong-Frederick (Fig. 4).

3.5 Conclusions et effet de l'élasticité

Les différents résultats obtenus mettent en évidence l'effet de rochet de la porosité mais aussi une évolution de la porosité en « forme de cloche ». Ces comportements différents et complexes sont fortement liés au type d'écrouissage et à leurs paramètres. Contrairement aux autres, le nouveau modèle présenté reproduit ces différents comportements de manière convaincante dans le cadre de ces hypothèses, c'est-à-dire pour des matériaux rigides et écrouissables. Ainsi, ces résultats sont obtenus en éliminant l'élasticité artificiellement.

Nous présentons en Figure 4 les résultats d'une simulation où l'on compare l'évolution de la porosité pour un matériau rigide-plastique parfait (qui présente une courbe stabilisée dès le premier demi-cycle comme attendu théoriquement) et un matériau élastique-plastique parfait dont le module d'Young est de 150 GPa.

Comme observée sur cette figure, l'effet de l'élasticité est non négligeable sur l'évolution de la porosité au cours des cycles. En effet, la porosité maximale obtenue pour un matériau élastique plastique-parfait est supérieure à celle obtenue pour un matériau rigide-isotrope. Hors, le modèle présenté ci-dessus a été obtenue par analyse limite-séquentielle, donc en négligeant l'élasticité. Cette hypothèse se révèle ainsi abusive dans l'étude de la rupture ductile cyclique où le couplage élasto-plastique semble important. Le comportement observée semble découler de couplage : l'existence, en début de traction, d'une légère augmentation de la porosité facilité la croissance plastique de la porosité et la légère diminution de la porosité en compression rend plus difficile la compression plastique de la porosité, entraînant de fait le phénomène de rochet de la porosité. Dès lors, la prise en compte de l'élasticité est inévitable pour proposer un modèle valide et utile à l'étude de la rupture ductile cyclique. Nous présentons dans le paragraphe suivant une approche heuristique pour prendre en compte cet effet négligé dans tous les autres modèles, celui de Gurson inclus.

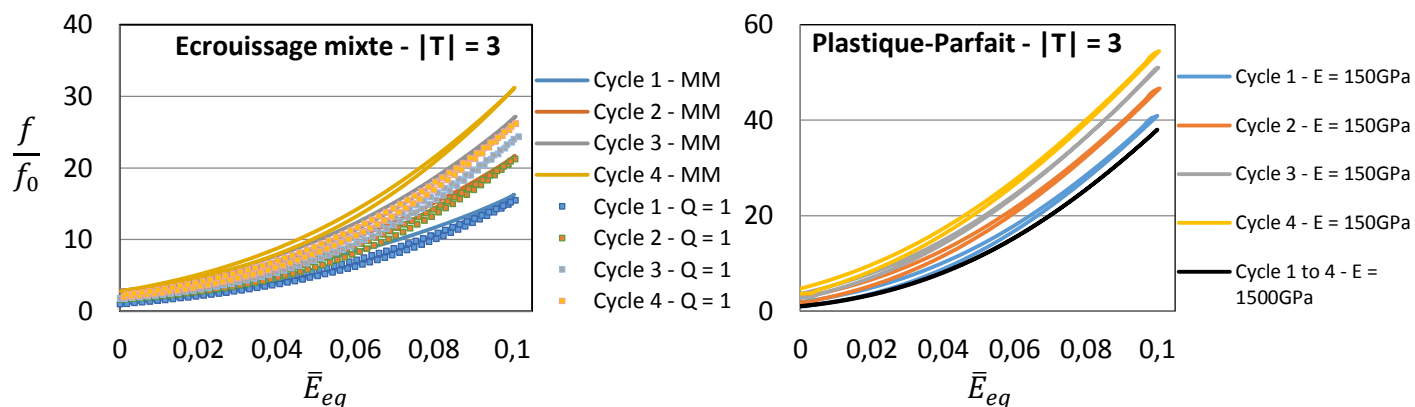


Figure 4 : Evolution de la porosité normalisée en fonction de la déformation totale équivalente algébrique

4. Prise en compte de l'élasticité dans le modèle

L'approche choisie pour incorporer l'élasticité dans le modèle présenté consiste à utiliser la solution classique d'une sphère élastique chargée hydrostatiquement pour d'une part prendre en compte la porosité dans le module d'élasticité isostatique et déterminer la part des déformations élastiques dans le taux de porosité jusque-là toujours négligée. Cheng et al [12] ont récemment proposée une approche pour incorporer l'élasticité dans ce type de modèle en postulant une « séparation des phases », purement élastique d'une part et purement plastique d'autre part, obtenant ainsi un taux de porosité élastique \dot{f}^e et un taux de porosité plastique \dot{f}^p , chacun évalué séparément. La présence de plasticité n'a cependant aucune raison d'impliquer une absence d'élasticité, de ce fait la disparition de \dot{f}^e n'a aucune raison de se produire lors de la phase plastique.

Nous présentons ici une approche différente permettant d'obtenir l'équation du taux de porosité incluant déformation plastique et élastique pour une cellule élémentaire sphérique.

4.1 Correction du module d'élasticité isostatique en présence de porosité

La prise en compte de la porosité découle directement de la résolution de la sphère creuse élastique sous contrainte hydrostatique. Cette correction est introduite à travers le coefficient α vérifiant :

$$\text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \alpha \frac{E}{1-2\nu} \text{tr}(\underline{\underline{D}}^e) \quad (7)$$

Le champ de déplacement solution du problème est le suivant :

$$\underline{\underline{\xi}} = r \frac{\Sigma}{1-f} \left(\frac{1-2\nu}{E} + \frac{(1+\nu)A^3}{2Er^3} \right) \underline{\underline{e}}_r \quad (8)$$

A l'aide duquel on obtient :

$$\alpha = \frac{2(1-2\nu)(1-f)}{2(1-2\nu) + (1+\nu)f} \quad (9)$$

4.2 Taux de porosité incluant déformation plastique et élastique

Pour déterminer l'équation du taux de porosité dans le cadre de notre procédure homogénéisation, nous allons définir une nouvelle dérivée objective en corrigeant la dérivée objective de Jaumann :

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\omega}} - \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \text{tr}(\underline{\underline{d}}) = \underline{\underline{\sigma}}^J + \underline{\underline{\sigma}} \text{tr}(\underline{\underline{d}}) \quad (10)$$

La définition de cette nouvelle dérivée objective permet d'introduire une nouvelle loi d'hypoélasticité microscopique, classiquement :

$$\underline{\underline{\hat{\sigma}}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{d}}^e) + 2\mu \underline{\underline{d}}^e \quad (11)$$

Nous faisons alors l'hypothèse que la forme de cette loi se conserve par changement d'échelle. Seuls les coefficients d'élasticité sont corrigés du fait de la présence d'une porosité.

$$\underline{\underline{\hat{\Sigma}}} = \lambda_c \text{tr}(\underline{\underline{D}}^e) + 2\mu_c \underline{\underline{D}}^e \quad (12)$$

$$\text{tr}(\underline{\underline{\hat{\Sigma}}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}) + \text{tr}(\underline{\underline{\Sigma}}) \text{tr}(\underline{\underline{D}}) = \alpha \frac{E}{1-2\nu} \text{tr}(\underline{\underline{D}}^e) \quad (13)$$

Les conditions de déformations homogènes au bord nous permettent d'obtenir :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \left\langle \underline{\underline{\sigma}} \right\rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \quad (14)$$

Et par dérivation temporelle de cette égalité on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} &= -\frac{|\dot{\Omega}|}{|\Omega|^2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \right) = -\frac{|\dot{\Omega}|}{|\Omega|^2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} tr(\underline{\underline{d}}) d\Omega \\ \text{D'où : } \dot{\underline{\underline{\Sigma}}} + \underline{\underline{\Sigma}} tr(\underline{\underline{D}}) &= \left\langle \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} tr(\underline{\underline{d}}) \right\rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (15)$$

Fort des équations (7), (13) et (15) nous pouvons dès lors exprimer l'augmentation du volume de la sphère en fonction de l'augmentation de volume de la cavité au cours du temps :

$$|\dot{\Omega}| = |\dot{\omega}| + \int_{\Omega-\omega} tr(\underline{\underline{d}}) d\Omega \quad (16)$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega-\omega} tr(\underline{\underline{d}}) d\Omega &= \int_{\Omega-\omega} tr(\underline{\underline{d}}^e) d\Omega && \text{car } tr(\underline{\underline{d}}^p) = 0 \text{ par incompressibilité plastique} \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \int_{\Omega-\omega} tr(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}) + tr(\underline{\underline{\sigma}}) tr(\underline{\underline{d}}) d\Omega && \text{par la loi d'hypoélasticité microscopique} \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \int_{\Omega-\omega} tr(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}) + tr(\underline{\underline{\sigma}}) tr(\underline{\underline{d}}) d\Omega && \text{car les contraintes sont nulles au bord de la cavité} \\ &= \frac{1-2\nu}{E} |\Omega| \left\langle tr(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}) + tr(\underline{\underline{\sigma}}) tr(\underline{\underline{d}}) \right\rangle_{\Omega} = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\alpha}{\alpha} |\Omega| \left(tr(\underline{\underline{\dot{\Sigma}}}) + tr(\underline{\underline{\Sigma}}) tr(\underline{\underline{D}}) \right) = \alpha |\Omega| tr(\underline{\underline{D}}^e) \end{aligned}$$

On obtient ainsi en faisant le lien avec l'équation (16) l'équation suivante :

$$|\dot{\Omega}| = |\dot{\omega}| + \alpha |\Omega| tr(\underline{\underline{D}}^e) \quad (17)$$

Enfin, à l'aide de la définition de la porosité on obtient :

$$f = \frac{|\omega|}{|\Omega|} \quad (18)$$

$$\dot{f} = \frac{|\dot{\omega}|}{|\Omega|} - f \frac{|\dot{\Omega}|}{|\Omega|} = \frac{|\dot{\Omega}| - \alpha |\Omega| tr(\underline{\underline{D}}^e)}{|\Omega|} - f tr(\underline{\underline{D}})$$

Et finalement :

$$\dot{f} = (1-f) tr(\underline{\underline{D}}^p) + (1-f-\alpha) tr(\underline{\underline{D}}^e) \quad (19)$$

4.3 Prise en compte de l'élasticité dans le modèle

Nous disposons à présent d'un critère de plasticité obtenu par analyse limite-séquentielle et de l'équation du taux de porosité incluant les déformations élastiques. Cependant, ce critère a été obtenu en négligeant l'élasticité, hypothèse indispensable à l'analyse limite séquentielle.

De ce fait, dans le but d'introduire l'élasticité dans le critère obtenu, nous considérons une porosité effective \bar{f} pour laquelle la partie élastique du taux de porosité est légèrement modifiée à travers un coefficient heuristique β pouvant être une constante ou non. Nous avons alors :

$$\dot{\bar{f}} = (1-f) tr(\underline{\underline{D}}^p) + \beta(1-f-\alpha) tr(\underline{\underline{D}}^e) \quad (20)$$

Et

$$\Phi(\underline{\Sigma}) = \frac{(\underline{\Sigma} - \underline{A}_1)_{eq}^2}{\Sigma_1^2} + 2q\bar{f} \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m - A_2}{\Sigma_2}\right) - 1 - (q\bar{f})^2 \leq 0 \quad (21)$$

Le choix de modifier la partie élastique du taux de porosité en la multipliant par un coefficient heuristique vient du fait que l'analyse limite séquentielle est valide en absence d'élasticité. Ainsi, le modèle obtenu par le critère et l'équation du taux de porosité traduisant l'incompressibilité plastique est valide dans ce cadre, comme vérifié à travers les comparaisons avec les simulations micromécaniques.

Ce nouveau modèle a aussi été validé par comparaison avec des simulations micromécaniques. Nous présentons ci-dessous deux résultats obtenus en prenant $\beta\left(\frac{f}{f_0}\right) = 11,5 \cdot e^{-\frac{1}{4}\frac{f}{f_0}} + 1$ décroissant en fonction de la porosité normalisée.

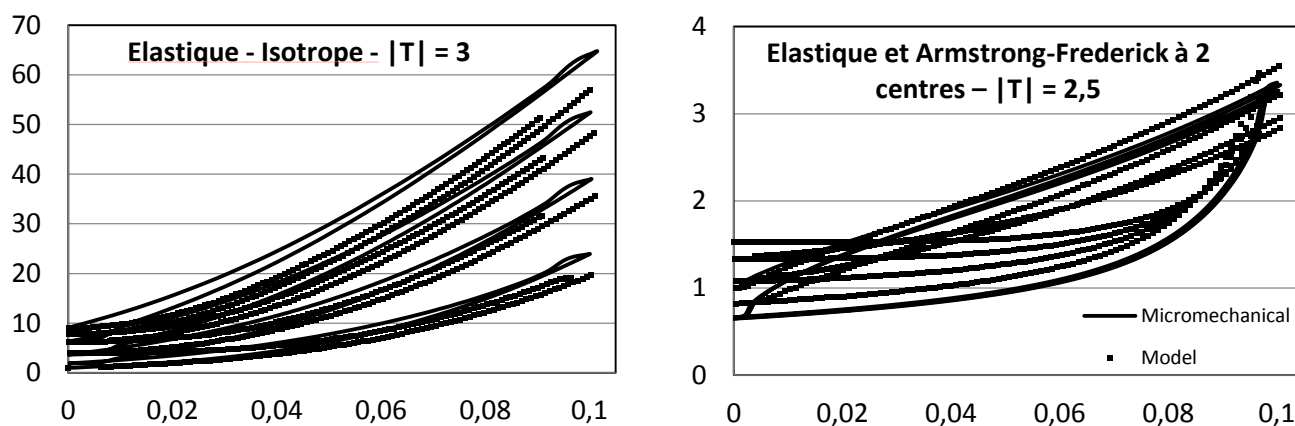


Figure 5 : Evolution de la porosité normalisée en fonction de la déformation totale équivalente algébrique

5. Conclusion et perspective

Une nouvelle manière de prendre en compte les effets de l'écrouissage et de l'élasticité dans les modèles micromécaniques de rupture ductile a été décrite. Cette nouvelle approche nécessite d'introduire une microsphère creuse radialement discrétisée à chaque « point de matière ». Les paramètres d'écrouissage de chaque couche doivent alors être mis à jour et gardé en mémoire dans chaque couche de cette microsphère.

Des simulations micromécaniques sur sphère creuse soumise à un chargement cyclique à triaxialité constante en valeur absolue ont été menées, pour différents types d'écrouissages et différentes lois d'évolutions des paramètres d'écrouissages. Elles ont mis en évidence deux comportements possibles, non indépendant, de la porosité : un phénomène de rochet de la porosité et une évolution en cloche de cette dernière. Contrairement aux autres modèles existants, le nouveau modèle proposé prédit ces différents comportements de manière satisfaisante.

D'autre part, les simulations micromécaniques ont mis en évidence un effet majeur de l'élasticité sur le phénomène de rochet de la porosité. Cet effet a été pris en compte dans le modèle proposé à travers trois corrections : la prise en compte de la porosité sur le coefficient d'élasticité isostatique, la correction de l'équation du taux de porosité en introduisant les déformations élastiques puis la prise en compte de l'élasticité dans le critère en introduisant une porosité effective. Une première étape de validation de ce modèle a été menée par comparaison de ses prédictions avec les résultats obtenus par simulations micromécaniques.

D'un point de vue numérique, la validation du modèle doit être poursuivie en comparant ses prédictions avec les résultats obtenus sur des essais sur éprouvettes de laboratoires (CT, éprouvette axisymétrique entaillée) et sur structure. L'ensemble de ces résultats expérimentaux sont d'ores et déjà disponibles, issues soit des travaux de B. Tranchand [16], soit du programme expérimental mené dans le cadre de ce travail.

Enfin, une validation expérimentale du phénomène de rochet de porosité est en cours à travers des expériences de tomographie in-situ sur éprouvette axisymétrique entaillée, sur un matériau modèle en acier inoxydable à porosité contrôlé et sur un acier ferritique de type Tu42C.

Références

- [1] Gilles, Ph, B. Jullien, and G. Mottet. "Analysis of cyclic effects on ductile tearing strength by a local approach of fracture." *Advances in Fracture/Damage Models for the Analysis of Engineering Problems* 137 (1992): 269-284.
- [2] Devaux, J., et al. "On continued void growth in ductile metals subjected to cyclic loadings." *IUTAM Symposium on Nonlinear Analysis of Fracture*. Springer, Dordrecht, 1997.
- [3] Besson, J., and C. Guillemer-Neel. "An extension of the Green and Gurson models to kinematic hardening." *Mechanics of materials* 35.1-2 (2003): 1-18.
- [4] Brocks, Wolfgang, and Dirk Steglich. "Damage models for cyclic plasticity." *Key Engineering Materials*. Vol. 251. Trans Tech Publications, 2003.
- [5] Rabold, F., and M. Kuna. "Cell model simulation of void growth in nodular cast iron under cyclic loading." *Computational materials science* 32.3-4 (2005): 489-497.
- [6] Steglich, D., et al. "Micromechanical modelling of cyclic plasticity incorporating damage." *International Journal of Solids and Structures* 42.2 (2005): 337-351.
- [7] Mbiakop, A., A. Constantinescu, and Kostas Danas. "On void shape effects of periodic elasto-plastic materials subjected to cyclic loading." *European Journal of Mechanics-A/Solids* 49 (2015): 481-499.
- [8] Lacroix, Rémi, Jean-Baptiste Leblond, and Gilles Perrin. "Numerical study and theoretical modelling of void growth in porous ductile materials subjected to cyclic loadings." *European Journal of Mechanics-A/Solids* 55 (2016): 100-109.
- [9] Gurson, Arthur L. "Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I—Yield criteria and flow rules for porous ductile media." *Journal of engineering materials and technology* 99.1 (1977): 2-15.
- [10] Leblond, J-B., G. Perrin, and J. Devaux. "An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals." *European journal of mechanics. A. Solids* 14.4 (1995): 499-527.
- [11] Morin, Léo, Jean-Claude Michel, and Jean-Baptiste Leblond. "A Gurson-type layer model for ductile porous solids with isotropic and kinematic hardening." *International Journal of Solids and Structures* 118 (2017): 167-178.
- [12] Cheng, L., et al. "A homogenization model for porous ductile solids under cyclic loads comprising a matrix with isotropic and linear kinematic hardening." *International Journal of Solids and Structures* 121 (2017): 174-190.
- [13] Yang, Wei H. "Large deformation of structures by sequential limit analysis." (1993).
- [14] Leu, S-Y. "Analytical and numerical investigation of strain-hardening viscoplastic thick-walled cylinders under internal pressure by using sequential limit analysis." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196.25-28 (2007): 2713-2722.
- [15] Leblond, Jean-Baptiste, et al. "Classical and sequential limit analysis revisited." *Comptes Rendus Mécanique* 346.4 (2018): 336-349.
- [16] Thèse de Benoit Tranchand, "Proposition d'un paramètre énergétique en déchirure cyclique : impact du séisme sur la résistance à la déchirure ductile des tuyauteries REP. ", *Laboratoire Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, Ecole Centrale-Supelec* (2015).