

# Endommagement – Rupture

## Mise en œuvre numérique à l'échelle des structures

Eric Lorentz

EDF R&D / IMSIA – eric.lorentz@edf.fr

### Résumé

*La simulation numérique des phénomènes d'endommagement à l'échelle d'une fissure individuelle peut reposer sur des modèles cohésifs, dans lesquels l'endommagement est concentré sur une surface, ou des modèles volumiques non locaux. Quelle que soit l'option choisie, elle soulève son lot de difficultés numériques bien spécifiques qui font de l'endommagement une non linéarité du comportement à part.*

**Mots clés :** endommagement ; loi cohésive ; instabilité ; localisation ; loi non locale

## 1 Introduction

Sous l'effet d'un chargement excessif, une structure peut se détériorer, jusqu'à ne plus être à même de remplir ses fonctions. La modélisation et la simulation de l'endommagement vise à anticiper ces dégradations structurelles, qu'il s'agisse de garantir le bon fonctionnement d'un matériel vieillissant ou de concevoir des pièces de manière optimisée. Dans ce qui suit, nous restreindrons notre attention à la fissuration macroscopique sous chargement quasi-statique. Nous chercherons à prédire l'apparition des fissures (charge et lieu d'amorçage) et leur propagation (trajet et cinétique en fonction du chargement).

A gros traits, deux familles de modèles sont à même de répondre à cette problématique : les modèles de zones cohésives (CZM pour Cohesive Zone Models) qui concentrent l'endommagement sur des surfaces de fissuration et les modèles d'endommagement volumiques (CDM pour Continuum Damage Mechanics) qui reposent sur des lois de comportement volumiques pour lesquelles l'endommagement tend à se concentrer dans des bandes qu'on interprétera comme des fissures « un peu épaisses ». Nous nous proposons d'examiner quelques-unes des difficultés théoriques et numériques auxquelles se heurtent la modélisation de l'endommagement. Certaines sont communes aux deux familles de modélisation : présence de charges limites, bifurcations, instabilités potentielles. Les algorithmes de résolution se doivent donc d'être suffisamment robustes pour franchir ces points critiques. D'autres difficultés sont spécifiques à la famille employée. Pour les CZM, il s'agit de disposer d'éléments finis capables de traiter à la fois le volume et la surface fissurée qui n'apparaît que progressivement dans la structure. Cette dernière est en outre l'objet de régimes de comportement contrastés : adhérence initiale, endommagement, surface libre et contact éventuel. Quant aux modèles CDM, ils requièrent l'application de lois de comportement non locales, faute de quoi « l'épaisseur » de la fissure n'est pas contrôlée. Les réponses de points matériels voisins sont couplées. En particulier, l'intégration du comportement ne peut plus être menée point par point.

## 2 Approches cohésives

### 2.1 Principe de modélisation

L'idée principale des approches cohésives [1-3] consiste à concentrer (ou condenser) la modélisation des mécanismes de dégradation sur des surfaces, qu'on notera  $\Gamma$ . *A contrario*, le volume alentour  $\Omega$ , ne s'endommage pas. Le déplacement est potentiellement discontinu à travers  $\Gamma$  et une loi de comportement cohésive  $\gamma$  lie le saut de déplacement au vecteur contrainte. On note  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  les déplacements et les contraintes dans  $\Omega$ ,  $\boldsymbol{\delta}$  et  $\mathbf{T}$  le saut de déplacement et le vecteur-contrainte le long de  $\Gamma$ . Par définition du saut de déplacement,  $\boldsymbol{\delta} = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ , et par continuité du vecteur-contrainte,  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  où  $\mathbf{n}$  désigne la normale à  $\Gamma$  et  $\llbracket \cdot \rrbracket$  le saut d'une quantité à travers  $\Gamma$ .

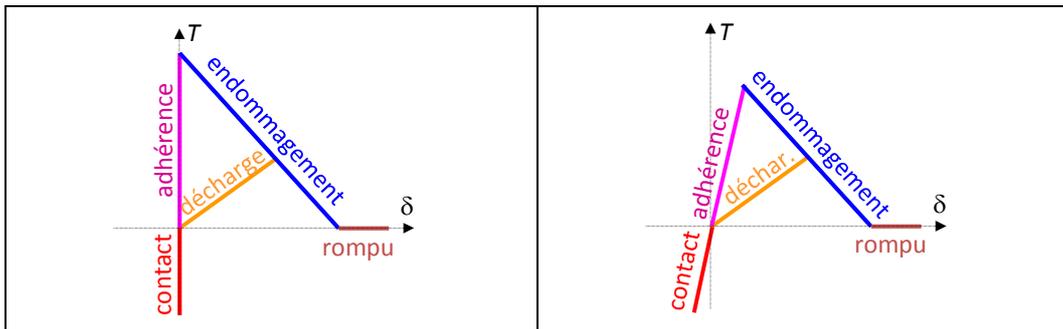


figure 1. Lois de comportement cohésive extrinsèque (a) et intrinsèque (b)

Pour simplifier la suite de l'exposé, on ne s'intéressera qu'à la direction perpendiculaire à la surface (le mode I en mécanique de la rupture), en édulcorant les couplages ouverture / glissement. Une relation typique entre l'ouverture  $\delta \equiv \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}$  et la contrainte de traction  $T \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est donnée en figure 1a. On y distingue plusieurs régimes : des conditions de contact qui empêchent toute interpénétration, une condition d'adhérence initiale avant d'atteindre un seuil d'endommagement, un endommagement actif irréversible pendant lequel le seuil diminue, une décharge réversible où l'endommagement n'évolue pas et une situation totalement cassée dans laquelle plus aucun effort ne transite à travers  $\Gamma$  au point considéré, i.e. une « vraie » fissure. Deux quantités jouent un rôle fondamental : la contrainte de traction au pic  $\sigma_c$  et l'énergie de fissuration  $G_c$  à fournir pour rompre un élément de surface  $ds$ , qui correspond à l'aire sous la courbe  $(\delta, T)$ , soit  $G_c = \int T d\delta$ .

Toutes les formes de relation  $\delta \leftrightarrow T$  ne sont pas licites. Ainsi, lorsque l'amorçage débute, i.e. lorsque  $\delta$  devient non nul, la contrainte ne peut pas croître [4]. Sinon, par continuité du vecteur contrainte, une autre fissure s'initierait juste à côté de la première car le seuil d'amorçage  $\sigma_c$  serait franchi. On observerait un continuum de fissures, ce qui conduirait en sommant les déplacements d'ouverture à un déplacement infini. Même si la loi cohésive est une loi de surface, le seuil  $\sigma_c$  s'impose donc à l'ensemble de la structure et conduit à un critère d'amorçage volumique [5]. Dans le cas présent où seul le mode I est pris en compte, on aurait le critère suivant (critère de Rankine) :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall \mathbf{n} \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \leq \sigma_c \quad (1)$$

### 2.2 Lois cohésives extrinsèques et intrinsèques

Dans l'exemple de la figure 1a, il n'y a pas de saut de déplacement, i.e. d'ouverture de la fissure, avant que la contrainte de traction n'atteigne un seuil. Cela correspond à une vision « fissuration » ;

on parle de loi cohésive extrinsèque. Une seconde famille de lois cohésives apparaît souvent dans la littérature. Elle considère que la surface cohésive  $\Gamma$  reflète en réalité une zone volumique d'épaisseur faible  $h$  et qu'il existe alors une rigidité élastique initiale qui vaut  $E/h$ , où  $E$  désigne le module de Young. Il en va de même des conditions de contact : une certaine interpénétration est possible, qui correspond à une compression de la couche volumique réelle avec, là encore, cette raideur  $E/h$ , certes élevée mais pas infinie. On parle alors de lois intrinsèques, cf. figure 1b. On pourrait croire cette seconde famille « plus physique ». Pourtant, elle entre en contradiction avec le fait que la contrainte doit décroître après amorçage. La contradiction est levée à condition d'interdire l'apparition d'une seconde fissure cohésive à une distance inférieure à  $h$  de la première, une condition souvent éludée et pas si simple que cela à exprimer formellement.

Sur le plan numérique, les lois intrinsèques peuvent apparaître comme des versions régularisées des lois extrinsèques, où  $E/h$  joue le rôle d'un paramètre de pénalisation. C'est d'ailleurs parfois la motivation principale à l'emploi des lois intrinsèques, à l'instar de ce qui est fait en contact (contact pénalisé). L'approche semble attractive car elle autorise l'utilisation d'éléments finis « aplatis » dont les seuls degrés de liberté sont des déplacements. En effet, à saut de déplacement  $\delta$  donné, la loi cohésive intrinsèque associe une unique contrainte d'ouverture  $T$ , ce qui permet de remonter classiquement à un vecteur élémentaire de forces intérieures. Mais on retrouve les écueils habituels des formulations pénalisées : le choix relativement arbitraire du paramètre de pénalisation et le mauvais conditionnement qui résulte de paramètres de pénalisation élevés, avec un impact significatif sur la convergence du calcul. A cela s'ajoute un autre handicap de taille : si l'on parvenait à faire effectivement tendre le paramètre de pénalisation vers l'infini, cela reviendrait à contrainte  $\delta = 0$  avant amorçage ou en phase de contact, et ce en chaque point d'intégration de l'élément ; c'est une contrainte trop forte par rapport à un espace de discrétisation basé sur des déplacements nodaux qui entraîne des oscillations de contraintes [6]. Enfin, n'oublions pas qu'il faudra aussi s'assurer via la taille des mailles que deux fissures cohésives ne soient pas plus proches que la distance  $h$ . Pour toutes ces raisons, cette famille de lois cohésives ne doit être utilisée en conjonction avec des éléments finis en déplacements qu'avec les plus grandes précautions.

Pourtant, c'est le choix numérique qui est généralement fait, de par la simplicité des éléments finis en question. En effet, les formulations cohésives extrinsèques se traduisent par une relation  $\delta \leftrightarrow T$  non univoque (pour  $\delta = 0$ , toute valeur de  $T$  inférieure à  $\sigma_c$  est licite) ; la raideur  $dT/d\delta$  en  $\delta = 0$  est infinie. Une solution avancée dans la littérature [7] consiste à n'activer un élément fini d'interface que lorsque le critère en contrainte est atteint. Difficile à mettre en œuvre dans le cadre d'un schéma implicite, cette solution ne répond pas à la problématique d'un contact qui aurait lieu après amorçage, ni à celle du mauvais conditionnement en présence d'une décharge juste après amorçage (raideur très forte). Une alternative qui nous paraît préférable consiste à employer des formulations d'éléments finis mixtes dont les degrés de liberté sont les déplacements et les forces (surfaiques) cohésives  $T$  [8], comme pour les modèles de contact continu. Ces éléments semblent effectivement répondre aux différentes problématiques soulevées.

### 2.3 Instabilités en phase de propagation

Un modèle cohésif introduit de fait une borne maximale sur les contraintes. Comme en plasticité parfaite, cela se traduit généralement par une force maximale supportable par la structure. Si on pilote le chargement extérieur en force, il existe un niveau au-delà duquel le problème n'admet plus de solution quasi-statique. Et un chargement en déplacement croissant ne règle pas nécessairement le problème. En effet, en phase de propagation, une compétition a lieu entre l'énergie consommée

par la fissure (liée à  $G_c$  et l'aire de la surface fissurée) et la restitution d'énergie élastique du fait de la décharge au voisinage de la zone cohésive (la contrainte  $y$  décroît en phase d'ouverture de fissure). Une propagation stable correspond à l'égalité de ces deux variations d'énergie et il faut augmenter le chargement pour propager plus avant. *A contrario*, si l'énergie restituée est supérieure à l'énergie consommée, la différence se manifeste sous forme d'énergie cinétique et la propagation devient instable [9].

On peut toutefois souhaiter poursuivre la simulation dans un cadre quasi-statique. Pour cela, dans le cas instable, il s'agit de diminuer le chargement au cours de la propagation : l'énergie disponible est alors transférée à l'extérieur de la structure sous forme de travail (négatif). Les méthodes de pilotage du chargement sont dédiées à cette problématique [10]. L'intensité du chargement devient une nouvelle inconnue du problème qui peut décroître pendant les phases de propagation instables. Une nouvelle équation scalaire, dite équation de pilotage, vient fournir l'information manquante. Elle est censée contraindre l'évolution des déplacements de sorte à ce qu'effectivement, la fissure se propage. Comme ces méthodes impliquent un ajustement du chargement pour suivre la propagation de fissure, elles ne sont pas compatibles avec des chargements et plus généralement des phénomènes dépendant du temps (fluage, chargements issus d'un transitoire thermique, etc.).

Les fonctions de pilotage utilisées en cas d'instabilités géométriques (flambement) contrôlent une norme  $L^2$  de l'incrément de déplacement ; on parle de méthodes à longueur d'arc [11]. Malheureusement, ces fonctions sont en général trop globales pour contrôler efficacement l'avancée de fissures. Des techniques de sélection d'une zone locale de contrôle des déplacements sont requises. Typiquement, l'ouverture de fissure dans la zone cohésive active (les points dans le régime bleu de la figure 1) est un bon marqueur de l'avancée de fissures. On pourra se reporter à [12,13] pour plus d'informations. L'exemple d'une plaque trouée en traction (figure 2) permet d'illustrer la nature des résultats qu'on peut escompter de ce type de méthodes. Notons qu'elles s'appliquent aussi aux problèmes d'endommagement volumique, les instabilités étant une conséquence des phénomènes de dégradation en général, indépendamment de la formulation retenue.

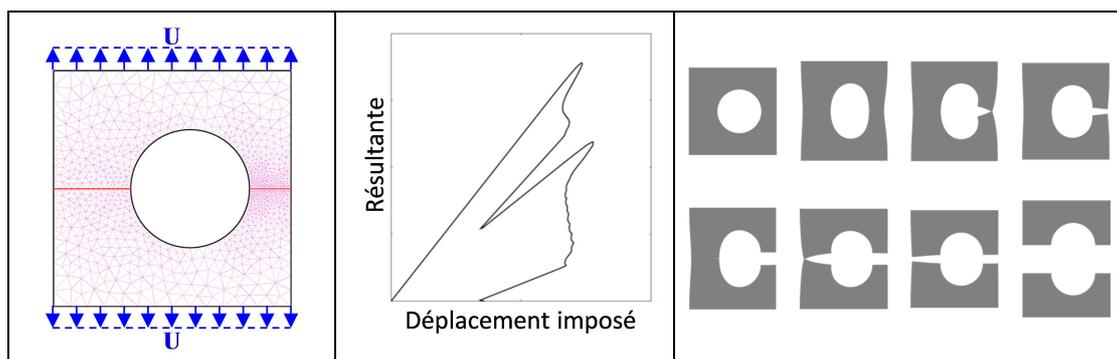


figure 2. Fissuration d'une plaque trouée en mode I : instabilités de la réponse globale

## 2.4 Trajet de fissuration

Lorsqu'on ne connaît pas *a priori* le trajet de fissuration, c'est-à-dire la surface  $\Gamma$ , cette dernière devient à son tour une inconnue du problème. Il convient alors de se doter d'un modèle pour prédire la position de  $\Gamma$ , en complément de la loi cohésive.

Les travaux [14,5] proposent un cadre dans lequel le déplacement potentiellement discontinu solution du problème est caractérisé comme étant le minimum d'une certaine énergie. Le lieu des

discontinuités du champ de déplacement constitue par définition la surface  $\Gamma$ . Tous les aspects du modèle cohésif sont ainsi inclus dans une seule énergie : le critère d'amorçage, le trajet de fissuration, la loi cohésive. La formulation est séduisante mais sa mise en œuvre numérique reste délicate, cf. [15] qui s'appuie sur une régularisation par champs de phase (on évoquera cette méthode dans la section dédiée à l'endommagement volumique).

D'autres auteurs ont préféré compléter la loi cohésive par un critère qui donne en chaque instant et en chaque point du front de fissure la direction que prendrait la surface  $\Gamma$  si elle devait se prolonger (phase de propagation). De tels critères s'appuient généralement sur l'état de contrainte courant : on peut par exemple stipuler que l'incrément de surface cohésive est localement perpendiculaire à la direction de contrainte principale maximale. Malheureusement, l'état de contrainte au voisinage du front de la zone cohésive est une quantité numériquement perturbée. Une étape de régularisation, plus ou moins locale et toujours arbitraire, est requise. On pourra se reporter à [16] pour une revue bibliographique sur la question. Ajoutons à cela que les étapes d'ouverture (loi cohésive) et de propagation de la surface cohésive sont généralement réalisées l'une après l'autre, ce qui renvoie de fait à un schéma explicite dont on peut questionner la stabilité. Enfin, on ne s'étendra pas sur les problématiques du branching (la fissure se scinde en deux), de l'intersection de fissures ou du cas où la fissure débouche sur un bord, autant de situations géométriquement délicates.

Une autre question, indépendante de la précédente mais pas moins difficile à traiter, consiste à discrétiser (par éléments finis) un champ de déplacement potentiellement discontinu à travers une surface qui n'est pas connue au début de la simulation. Si on n'accepte de représenter les discontinuités que le long d'éléments finis classiques, il faudra alors adapter progressivement le maillage à la position de la surface  $\Gamma$ , avec la question sensible du transfert des champs d'un maillage à l'autre. En effet, travailler à maillage fixé conduirait à une estimation erronée de l'aire de la surface fissurée (trajet en zigzag) et donc plus généralement à une mauvaise prédiction de la position des fissures et de la réponse de la structure [17]. Des éléments finis plus sophistiqués, comme les éléments X-FEM [18] ou E-FEM [19], permettent de discrétiser des champs discontinus sans contraindre le maillage par la position de ces discontinuités. Bien que séduisants à première vue, ces éléments restent délicats à mettre en œuvre dans toutes les situations, comme en témoigne l'abondante littérature sur le sujet.

On l'aura compris, la prédiction du trajet de fissuration constitue un problème difficile, notamment dans un contexte tridimensionnel. On recommande donc de privilégier l'usage de modèles cohésifs lorsque le ou les trajets de fissuration potentiels sont connus *a priori*. Dans le cas contraire, le recours à des modélisations volumiques de l'endommagement nous semble préférable.

### 3 Approches à champs d'endommagement volumique

#### 3.1 Adoucissement et localisation des déformations

Plutôt que de recourir à une modélisation cohésive, on peut préférer décrire l'effet des dégradations à l'échelle volumique du point matériel, voir par exemple [20,21]. On construit ainsi des lois de comportement d'endommagement liant la contrainte à la déformation, cf. figure 3 pour une représentation sur un essai de traction homogène où on distingue une phase élastique réversible (violet), une phase d'endommagement dissipatif (bleu), une décharge réversible (ocre) et une refermeture en compression (rouge).

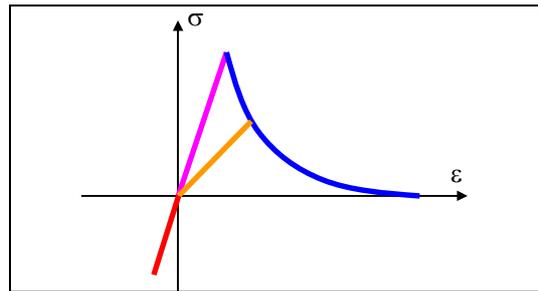


figure 3. Loi d'endommagement

Sur le principe, l'approche est attractive puisqu'on retrouve le terrain connue des lois de comportement non linéaires, à l'instar de la plasticité. Toutefois, l'endommagement entraîne un phénomène d'adoucissement (ou écrouissage négatif), à savoir que le domaine des contraintes admissibles se réduit au fur et à mesure que l'endommagement progresse ; le matériau endommagé résiste moins bien aux sollicitations. C'est la phase décroissante en bleu sur la figure 3. Cette différence avec les mécanismes de plasticité à écrouissage positif (croissance de la contrainte seuil) est à l'origine des spécificités – et des difficultés – relatives à la modélisation de l'endommagement.

En effet, une décroissance locale des contraintes peut aussi bien correspondre à une décharge élastique (en ocre sur la figure 3) qu'à une évolution de l'endommagement (en bleu). Par couplage de l'équilibre et du comportement, la formation de bandes endommagées aux côtés de zones en décharge élastique devient possible, voir l'illustration sur un barreau en figure 4. Cela correspond à une réalité expérimentale : on observe que l'endommagement et la déformation se concentrent dans des bandes d'épaisseur fine et ce quel que soit le matériau (métaux, roches, béton, etc.). Malheureusement, l'épaisseur des bandes d'endommagement prédites par la théorie reste arbitraire. Or l'énergie dissipée par endommagement est directement liée au volume endommagé, donc à l'épaisseur de ces bandes. Dans le cas limite d'une épaisseur nulle, on pourrait casser sans dissiper d'énergie (aire sous la courbe de la figure 4b), ce qui, là, n'est pas conforme à l'expérience.

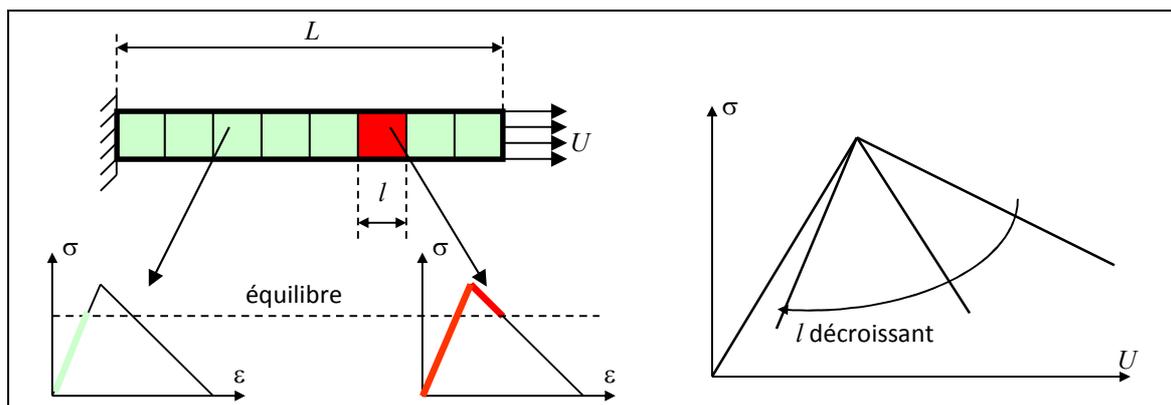


figure 4. Localisation pathologique des déformations en présence d'adoucissement

Sur le plan mathématique, le système d'équations aux dérivées partielles qui décrit le problème (équilibre et comportement) n'est pas bien posé car l'opérateur tangent n'est plus elliptique [22]. Si on essaie malgré tout de résoudre le problème en le discrétisant par éléments finis, on constate que l'endommagement se concentre dans des couches d'épaisseur une maille et dont l'orientation est fixée par celle du maillage. Quant à la réponse globale et à l'énergie dissipée, elle est directement liée à la taille des mailles [23,24]. Persister reviendrait à admettre que le maillage est partie intégrante de la physique du problème, ce qui n'est pas raisonnable.

En réalité, les observations expérimentales indiquent que les champs d'endommagement et de déformation présentent des variations spatiales dont l'échelle est comparable à celle des microstructures sous-jacentes. Or l'expression de lois de comportement à l'échelle macroscopique, par homogénéisation du comportement microstructural, repose sur une hypothèse de séparation des échelles micro/macro qui n'est donc plus vérifiée. Le phénomène d'adoucissement et les localisations qui en résultent imposent d'introduire explicitement dans les lois de comportement une échelle issue de la microstructure. On parle alors de lois de comportement non locales, au sens large.

Une alternative parfois proposée pour sa simplicité consiste à introduire une certaine viscosité pour traiter le problème de localisation pathologique plutôt que de mettre en œuvre une loi de comportement non locale [25]. Mais en régime quasi-statique, la viscosité introduit un temps caractéristique et non une longueur. Une analyse dimensionnelle conduit alors à une épaisseur de bandes et donc une énergie dissipée liées à la taille de la structure étudiée ou nulles : les problèmes demeurent et quelques essais numériques permettent de s'en convaincre [23]. Viscosité ou non, l'absence de séparation des échelles impose le recours à des lois de comportement non locales.

### 3.2 Formulations non locales

La construction de lois de comportement non locales reste souvent phénoménologique. Diverses approches sont possibles selon les variables qui porteront la non localité. Pour illustrer quelques-unes d'entre elles et comprendre leur effet sur la localisation, on adopte le cadre pédagogique d'un comportement exprimé à l'échelle de la structure et qui dérive d'une énergie [26,27]. En quelques mots, on note  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $a$  les champs de déplacement, de déformation et d'endommagement,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  les ensembles des champs de déplacement admissibles et d'endommagements admissibles (croissants avec le temps). On introduit l'énergie de la structure  $\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, a)$  qui dépend aussi du niveau de chargement courant. Les équation d'équilibre et d'évolution de l'endommagement en découlent via les minimisations suivantes, où  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{C}$  et  $a^* \in \mathcal{A}$  sont solutions du problème :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{u} \in \mathcal{C} & \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*), a^*) \leq \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), a^*) \\ \forall a \in \mathcal{A} & \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*), a^*) \leq \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*), a) \end{cases} \quad (2)$$

Typiquement, dans le cas d'un modèle local, l'énergie  $\mathcal{E}$  ne dépendrait que des valeurs de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $a$  point par point à travers un potentiel densité d'énergie  $\Phi$  :

$$\mathcal{E}_{loc}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) \equiv \int_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), a(\mathbf{x})) d\Omega \quad (3)$$

Pour construire une loi de comportement non locale, une première variante consiste à construire des variables de déformation  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ou d'endommagement  $\bar{a}$  lissées et à les introduire dans l'une ou l'autre des minimisations (2). Le lissage peut être obtenu *via* un produit de convolution [28] :

$$\bar{a}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} a(\mathbf{y}) w_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy \quad (4)$$

où le noyau  $w_c$  peut typiquement être une Gaussienne et dépend d'une longueur  $l_c$ . Une seconde option de lissage repose sur la résolution d'une équation aux dérivées partielles [29] :

$$\begin{cases} \bar{a} - l_c^2 \nabla^2 \bar{a} = a & \text{dans } \Omega \\ \partial \bar{a} / \partial n = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (5)$$

C'est un cas particulier de (4) avec  $w$  l'opérateur de Green. On a examiné dans [30] le caractère opérationnel ou non de ces approches. Il s'avère que tout choix n'est pas pertinent et qu'une analyse au cas par cas est nécessaire. Certains auteurs combinent d'ailleurs les contributions locales et régularisées via des sommes pondérées  $\gamma \bar{a} + (1-\gamma)a$  en remplacement de  $\bar{a}$  [31].

Une seconde variante pour construire des lois non locales consiste à introduire le gradient de la déformation dans l'énergie. On parle alors de modèles à second gradient [32-34] :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) \equiv \int_{\Omega} [\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), a(\mathbf{x})) + c \nabla \boldsymbol{\varepsilon} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega \quad (6)$$

où le paramètre  $c$  a la dimension d'une force et introduit indirectement une longueur interne. L'équation d'équilibre s'en trouve modifiée, avec l'apparition d'un tenseur de contrainte supplémentaire  $\boldsymbol{\Sigma} \equiv 2c \nabla \boldsymbol{\varepsilon}$ . On comprend que le terme en gradient de déformation dans (6) vient pénaliser les forts gradients de déformation dans la minimisation (2) et contrôle ainsi la localisation.

Dans le même esprit, on peut introduire un terme en gradient d'endommagement [35-39] :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) \equiv \int_{\Omega} [\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), a(\mathbf{x})) + c \nabla a \cdot \nabla a] d\Omega \quad (7)$$

La minimisation par rapport à l'endommagement dans (2) assure le contrôle de la localisation, les champs trop localisés ayant un coût énergétique trop élevé. Il est intéressant de noter qu'une technique de résolution des problèmes de propagation de fissures conduit à une expression similaire à (7). Il s'agit des méthodes à champs de phase [15,40] : la fissure « stricte » est « diluée » via l'introduction d'un champ  $a$  qui vaut 1 à l'emplacement de la fissure, 0 loin de la fissure et qui décroît de 1 à 0 à proximité de la fissure. Les formulations à gradient d'endommagement (7) bénéficient ainsi des mêmes propriétés mathématiques que les modèles à champs de phase.

Dans (7), le contrôle de la localisation est assuré par le terme en gradient, la minimisation de l'énergie gouvernant la distribution fine du champ d'endommagement. Une approche alternative dite « Thick Level Set » ou TLS [41] restreint dès le départ l'ensemble des champs d'endommagement admissibles  $\mathcal{A}$  à des formes avec localisation dans lesquelles la distribution fine est imposée *a priori*. La connaissance du bord de la zone endommagée détermine alors totalement le champ d'endommagement. La minimisation de l'énergie par rapport à cette famille réduite de champs conduit à une loi d'évolution de la frontière de la zone endommagée. Plutôt que de minimiser des champs, on est confronté à des équations de frontières mobiles, ce qui requiert des techniques numériques spécifiques.

Enfin, une dernière famille consiste à introduire de nouveaux degrés de liberté cinématiques notés  $\boldsymbol{\chi}$  ; on parle de milieux micromorphiques. Ces inconnues cinématiques supplémentaires peuvent être des dilatations [42], des rotations (milieux de Cosserat) [43] des déformations [44]. Pour ces dernières, un cas typique est fourni par l'énergie suivante :

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}, a, \boldsymbol{\chi}) \equiv \int_{\Omega} [\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), a(\mathbf{x})) + c \nabla \boldsymbol{\chi} : \nabla \boldsymbol{\chi} + h(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\chi})^2] d\Omega \quad (8)$$

Si le paramètre  $h$  est destiné à être grand, le dernier terme assure la contrainte  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\chi}$  par pénalisation. On retrouve alors la famille (6) des modèles à second gradient. Dans le cas contraire, on peut aussi interpréter  $\boldsymbol{\chi}$  comme une variable interne et on est ramené aux modèles (7) à gradients de variables internes.

Aucune de ces formulations ne l'emportent sur les autres, d'autant que leurs propriétés dépendent aussi du comportement caractérisé par la fonction  $\Phi$ . On recommande de choisir au cas par cas la mieux adaptée au problème considéré, en examinant les questions pratiques suivantes :

- En phase d'écrouissage positif (durcissement), le problème est-il bien posé ? Et ce sous quelles conditions relatives au chargement ?
- En phase d'écrouissage négatif, le problème est-il bien posé ? Décrit-il effectivement la propagation de zones endommagées localisées, s'apparentant à des fissures et caractérisées par une énergie dissipée qu'on retrouve expérimentalement ?
- Dans quelle mesure le modèle permet-il de décrire des ouvertures macroscopiques de fissures ? Rend-il compte du contact en situation de refermeture (ou de cisaillement) ?
- Les éléments finis et les formulations numériques qui permettent de traiter le problème non local sont-ils robustes ? Et performants ?

Même si toutes ces questions ne trouvent pas encore une réponse optimale, les formulations qu'on a présentées peuvent d'ores et déjà conduire à des résultats opérationnels. On illustre en figure 5 le type de prédictions qu'on peut en attendre, ici sur la base d'un modèle à gradient d'endommagement. Il s'agit à nouveau d'une plaque trouée, constituée d'un matériau quasi-fragile et sollicitée en traction. La zone endommagée s'apparente effectivement à une fissure s'étendant de part et d'autre du trou et dont « l'épaisseur » est contrôlée par la longueur interne du modèle. Les résultats sont insensibles à l'orientation et la finesse du maillage, pour peu que cette dernière soit suffisante pour bien discrétiser les champs dans les bandes de localisation (c'est impératif).

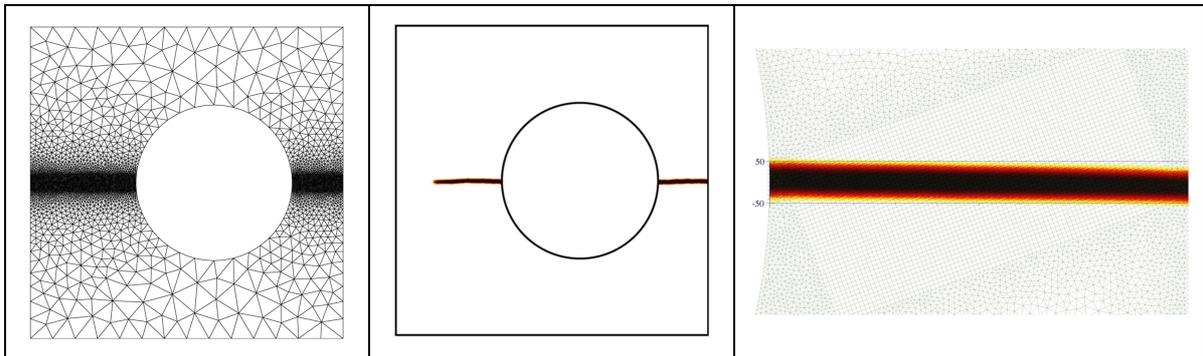


figure 5. Plaque trouée : maillage, distribution de l'endommagement et objectivité par rapport au maillage

## 4 Conclusion

Au final, pour modéliser la fissuration d'une structure, les modèles cohésifs semblent bien adaptés dès lors qu'on connaît le trajet des fissures. Ils sont efficaces et robustes, à condition de traiter l'apparition d'éventuelles instabilités. Si le trajet de fissure n'est pas connu *a priori*, on recommande plutôt l'usage de modèles d'endommagement volumiques, en prenant soin d'adopter une formulation non locale. Le coût du calcul devient alors bien supérieur. En effet, des éléments finis spécifiques sont requis, donc les inconnues sont non seulement les déplacements mais aussi l'endommagement. Et surtout, il s'agit de mailler finement (par rapport à « l'épaisseur » de fissure) aux endroits où la fissuration se développe : en 3D, des techniques d'adaptation de maillages [45-48] semblent incontournables, même si elles peuvent fragiliser la robustesse des simulations.

Pour pouvoir passer de l'une à l'autre de ces familles en fonction de la connaissance ou non du trajet de fissure, une certaine cohérence est requise : les résultats qu'elles permettent d'obtenir

doivent être comparables. Les liens entre modèles cohésifs et modèles d'endommagement volumiques ont été examinés dans la littérature [49-52], notamment dans le contexte d'une transition volumique → cohésif en cours de fissuration. L'objectif est alors de mieux traiter le comportement final de la fissure (contact, par exemple), voire de pallier les déficiences de certaines formulations non locales en fin d'endommagement, au prix généralement d'une perte de robustesse des simulations. Dans un autre registre, une analyse [53] a été menée pour construire des modèles volumiques non locaux aux propriétés similaires à celles d'une loi cohésive (caractéristiques matériaux, réponse globale, ouverture de fissure, etc.). Il n'est alors plus nécessaire de basculer à une formulation cohésive en cours de calcul. Mais ces liens restent encore à conforter.

L'endommagement n'est donc pas une non linéarité de comportement comme les autres et soulève des questions numériques qui, pour certaines, restent encore du domaine de la recherche. L'appropriation industrielle en est freinée et une sensibilisation à ces spécificités est requise.

## Références

- [1] Barenblatt G., The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *J. Appl. Math. Mech.* 23 (1959) 622-636
- [2] Dugdale D. S., Yielding of steel sheets containing slits., *J. Mech. Phys. Solids* 8 (1960) 100-104
- [3] Hillerborg A., Modeer M., Petersson P.E., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cem. Concr. Res.* 6 (1976) 773-782
- [4] Bazant Z.P., Concrete fracture models: testing and practice, *Eng. Fract. Mech.* 69 (2002) 165-205
- [5] Charlotte M., Laverne J., Marigo J.-J., Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach, *Eur. J. Mech. A/Solids* 25 (2006) 649-669
- [6] Schellekens J.C.J., de Borst R., On the numerical integration of interface elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 36 (1993) 43-66
- [7] Sam C.-H., Papoulia K.D., Vavasis S.A., Obtaining initially rigid cohesive finite element models that are temporally convergent, *Eng. Fract. Mech.* 72 (2005) 2247-2267
- [8] Lorentz E., A mixed interface finite element for cohesive zone models, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198 (2008) 302-317
- [9] Crisfield M.A., Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 22 (1986) 751-767
- [10] Crisfield M.A., *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1. Wiley, Chichester, 1996
- [11] Crisfield M.A., A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through, *Comput. Struct.* 13 (1981) 55-62
- [12] Geers M.G.D. , Enhanced solution control for physically and geometrically non linear problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 46 (1999) 177-230
- [13] Lorentz E., Badel P., A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 60 (2004) 499-526
- [14] Francfort G.A., Marigo J.-J., Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids* 46 (1998) 1319-1342
- [15] Bourdin B., Francfort G.A., Marigo J.-J., The variational approach to fracture, *J. Elast.* 91 (2008) 5-148
- [16] Jäger P., Steinmann P., Kuhl E., Modeling three-dimensional crack propagation – A comparison of crack path tracking strategies, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 76 (2008) 1328-1352
- [17] Fraternali F., Free discontinuity finite element models in two-dimensions for in-plane crack problems, *Theor. Appl. Fract. Mech.* 47 (2007) 274-282
- [18] Ferté G., Massin P., Moës N., 3D crack propagation with cohesive elements in the extended finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 300 (2016) 347-374
- [19] Oliver J., Huespe A.E., Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193 (2004) 2987-3014
- [20] Gurson A.L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part I—yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Eng. Mater. Technol.* 99 (1977) 2-15
- [21] Marigo J.-J., Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique, *CR. Acad. Sci. Paris II* 292 (1981) 1309-1312
- [22] Benallal A., Billardon R., Geymonat G., Bifurcation and localization in rate-independent materials. Some general considerations, in: Nguyen Q.S. (ed) *Bifurcation and stability of dissipative systems*, International Centre for Mechanical Sciences 327, 1993, pp. 1-44

- [23] Rots J.G., Computational Modeling of Concrete Fracture, Thesis report, TR diss. 1663, Delft, 1988
- [24] Forest S., Lorentz E., Localization phenomena and regularization methods, in: Besson J. (ed.), Local approach to fracture, Presses de l'Ecole des Mines, Paris, 2004, pp. 311-371
- [25] de Borst R., Sluys L.J., Mühlhaus H.-B., Pamin J., Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation, *Eng. Comput.* 10 (1993) 99-121
- [26] Germain P., Nguyen Q.S., Suquet P., Continuum Thermodynamics, *J. Appl. Mech.* 50 (1983) 1010-1020
- [27] Mialon P., Eléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité, EDF bulletin de la DER série C mathématiques informatiques 3 (1986) 57-89
- [28] Bazant Z.P., Pijaudier-Cabot G., Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence, *J. Appl. Mech.* 55 (1988) 287-293
- [29] Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M., de Vree J.H.P., Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 39 (1996) 3391-3403
- [30] Lorentz E., Andrieux S., Analysis of non-local models through energetic formulations, *Int. J. Solids Struct.*, 40 (2003) 2905-2936
- [31] Jirasek M., Rolshoven S., Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials, *Int. J. Eng. Sci.* 41 (2003) 1553-1602
- [32] Fernandes R., Chavant C., Chambon R., A simplified second gradient model for dilatant materials: theory, and numerical implementation, *Int. J. Solids Struct.* 45 (2008) 5289-5307
- [33] Lorentz E., Besson J., Cano V., Numerical simulation of ductile fracture with the Rousselier constitutive law, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 197 (2008) 1965-1982
- [34] Enakoutsa, K., Leblond J.-B., Numerical implementation and assessment of the GLPD micromorphic model of ductile rupture, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 28 (2009) 445-460
- [35] Mühlhaus H., Aifantis E., The influence of microstructure-induced gradients on the localization of deformation in viscoplastic materials, *Acta Mech.* 89 (1991) 217-231.
- [36] Fremond M., Nedjar B., Damage, gradient of damage and principle of virtual power, *Int. J. Solids Struct.* 33 (1996) 1083-1103
- [37] Lorentz E., Andrieux S., A variational formulation for nonlocal damage models, *Int. J. Plast.* 15 (1999) 119-138
- [38] Pham K., Amor H., Marigo J.-J., Maurini C., Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture, *Int. J. Damage Mech.* 20 (2011) 618-652
- [39] Zhang Y., Lorentz E., Besson J., Ductile damage modelling with locking-free regularised GTN model, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 113 (2018) 1871-1903
- [40] Miehe C., Welschinger F., Hofacker M., Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: variational principles and multi-field FE implementations, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 83 (2010) 1273-1311
- [41] Moës N., Stolz C., Bernard P.-E., Chevaugeon N., A level set based model for damage growth: the thick level set approach, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 86 (2011) 358-380
- [42] Pijaudier-Cabot G., Burlion N., Damage and localisation in elastic materials with voids, *Mech. Cohes-Frict. Mater.* 1 (1996) 129-144
- [43] de Borst R., Sluys L.J., Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 90 (1991) 805-827
- [44] Forest S., Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity and damage, *J. Eng. Mech.* 135 (2009) 117-131
- [45] Svedberg T., Runesson K., An adaptive finite element algorithm for gradient theory of plasticity with coupling to damage, *Int. J. Sol. Struct.* 37 (2000) 7481-7499
- [46] Rodríguez-Ferran A., Huerta A., Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models, *Int. J. Solids Struct.* 37 (2000) 7501-7528
- [47] Patzak B., Jirasek M., Adaptive Resolution of Localized Damage in Quasi-brittle Materials, *J. Engrg. Mech.* 130 (2004) 720-732
- [48] Mediavilla J., Peerlings R.H.J., Geers M.G.D., A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations, *Comput. Struct.* 84 (2006) 604-623
- [49] Comi C., Mariani S., Perego U., An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31 (2007) 213-238
- [50] Mediavilla J., Peerlings R.H.J., Geers M.G.D., Discrete crack modelling of ductile fracture driven by non-local softening plasticity, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 66 (2006) 661-688
- [51] Cuvilliez S., Feyel F., Lorentz E., Michel-Ponnelle S., A finite element approach coupling continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 237 (2012) 244-259
- [52] Feld-Payet S., Chiaruttini V., Besson J., Feyel F., A new marching ridges algorithm for crack-path tracking in regularized media, *Int. J. Sol. Struct.* 71 (2015) 57-69
- [53] Lorentz E., A nonlocal damage model for plane concrete consistent with cohesive fracture, *Int. J. Fract.* 207 (2017) 123-159