



Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique



Homogénéisation analytique : schémas linéaires classiques et morphologies associées

Sébastien Brisard

(Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Med, LMA UMR7031, Marseille, France)

Introduction

Bases de l'homogénéisation (D. Kondo)

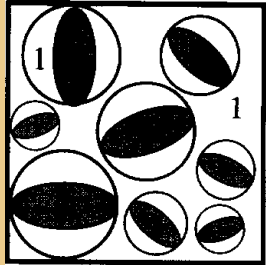
$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad } \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial \Omega$$

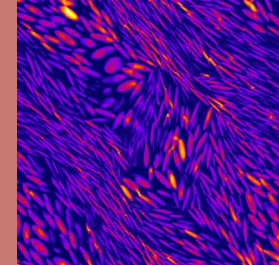
$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^{\text{hom}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}^{\text{hom}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Résolution du problème auxiliaire de l'homogénéisation

Complexité des calculs multi-échelles



Calculs en « champs moyens »



Calculs en « champs complets »
(L. Gélébart)

Dans le prochain épisode...

Les méthodes présentées ici pour résoudre le problème auxiliaire linéaire seront utilisées par M. Idiart pour traiter de non-linéarités matérielles

Sommaire

0. Rappels

1. Schémas d'homogénéisation pour des biphasés : un cas scalaire

1.1 Composites à matrice

1.2 Composites pour lesquels aucune phase ne joue le rôle de matrice

2. Problème(s) d'Eshelby et tenseurs de Hill

2.1 Problèmes de l'inclusion et de l'inhomogénéité

2.2 Tenseurs de Hill

3. Matériaux multi-phasiques, anisotropies géométriques et matérielles

4. Quelques « astuces » classiques

5. Approches variationnelles : bornes de Hashin et Shtrikman, bornes de Ponte Castañeda et Willis

0. Rappels

Problème local de l'homogénéisation

Équations de champs

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega$$

Conditions aux limites

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial \Omega$$

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$: déformation macroscopique, imposée

(paramètre de chargement)

Contrainte et déformation macroscopiques

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV_x = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} !$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV_x$$

Raideur homogénéisée

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^{\text{hom}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}^{\text{hom}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

🤔 Estimation (analytique)
de la solution de ce problème ?

Tenseurs de localisation des déformations

Cas d'un matériau hétérogène à N phases

Déformation moyenne dans chaque phase

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\alpha} = \frac{1}{|\Omega_{\alpha}|} \int_{\mathbf{x} \in \Omega_{\alpha}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \mathbf{A}_{\alpha} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} = \mathbf{I}$$

Contrainte moyenne

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} : \mathbf{A}_{\alpha} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{C}^{\text{hom}} = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} : \mathbf{A}_{\alpha}$$

Autre expression de la raideur homogénéisée

$$\mathbf{C}^{\text{hom}} = \mathbf{C}_1 + \sum_{\alpha=2}^N f_{\alpha} (\mathbf{C}_{\alpha} - \mathbf{C}_1) : \mathbf{A}_{\alpha}$$

1. Schémas d'homogénéisation pour des biphasés : un cas scalaire

1.1 Composites à matrice

Un cas scalaire

Module de compression homogénéisé d'une assemblée d'inclusions sphériques, monodisperses, plongées dans une matrice homogène

Formules générales

$$\varepsilon_i = \langle \varepsilon \rangle_i = \mathbf{A}_i : \bar{\varepsilon} \quad \mathbf{C}^{\text{hom}} = \mathbf{C}_m + f_i (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m) : \mathbf{A}_i$$

$$\mathbf{C}^{\text{hom}} : \bar{\varepsilon} = \mathbf{C}_m : \bar{\varepsilon} + f_i (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m) : \varepsilon_i$$

Sollicitation hydrostatique

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} \delta$$

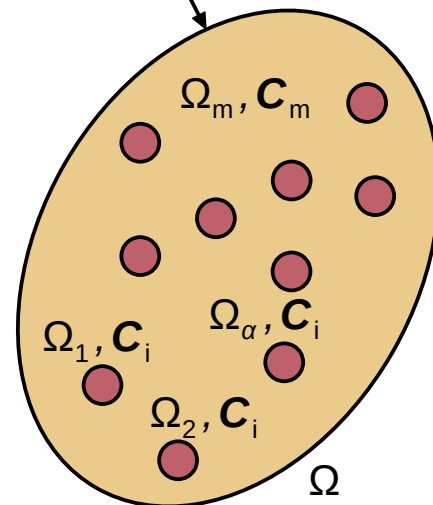
$$\varepsilon_i = \varepsilon_i \delta$$

😬 à justifier !!!

$$K^{\text{hom}} \bar{\varepsilon} = K_m \bar{\varepsilon} + f_i (K_i - K_m) \varepsilon_i$$

Estimation des déformations
dans l'inclusion ?

$$u(\mathbf{x}) = \bar{\varepsilon} \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \partial \Omega)$$



Principe des schémas

Fraction volumique d'inclusion très faible

- 💡 inclusions (en général) éloignées
- 💡 perturbation **locale** des déformations par les inclusions
- 💡 à l'extérieur de ces « zones de régularisation » : $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \delta$

Dans la zone de régularisation

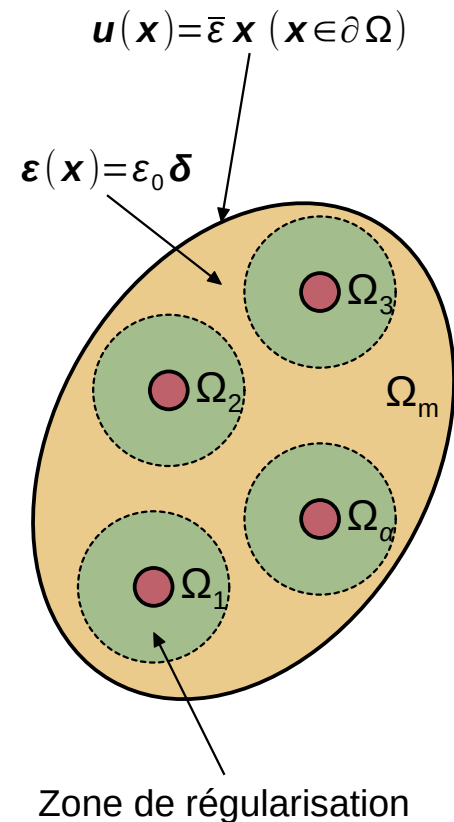
Équations de champs

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}$$

Conditions aux limites

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{x}$$

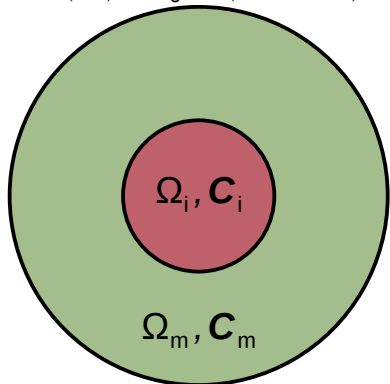
Même déformation pour toutes les inclusions !



Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby

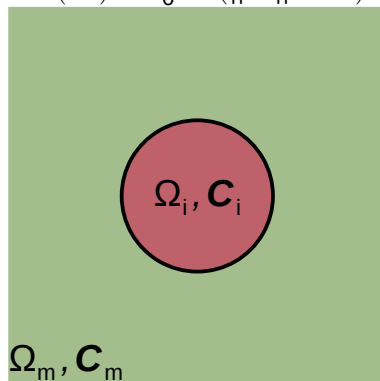
En milieu borné

$$u(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega)$$



En milieu infini

$$u(\mathbf{x}) \sim \varepsilon_0 \mathbf{x} \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty)$$



Problème linéaire !

La déformation moyenne dans l'inhomogénéité dépend linéairement de la déformation à l'infini !

$$\varepsilon_i = \frac{3\kappa_m + 4\mu_m}{3\kappa_i + 4\mu_m} \varepsilon_0$$

Estimation du module de compression homogénéisé

$$K^{\text{hom}} \bar{\varepsilon} = K_m \bar{\varepsilon} + f_i (\kappa_i - \kappa_m) \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \simeq \frac{3\kappa_m + 4\mu_m}{3\kappa_i + 4\mu_m} \varepsilon_0$$



$$K^{\text{est}} \bar{\varepsilon} = K_m \bar{\varepsilon} + f_i (\kappa_i - \kappa_m) \frac{3\kappa_m + 4\mu_m}{3\kappa_i + 4\mu_m} \varepsilon_0$$

Lien entre
déf. aux
et
déf. macro ?

Solution du problème d'Eshelby (1/2)

Solution générale

$$u(r) = ar + \frac{b}{r^2}$$

$$\varepsilon_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}$$

$$\sigma_{rr} = 3\kappa a - \frac{4\mu b}{r^3}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 3\kappa a + \frac{2\mu b}{r^3}$$

Dans la matrice

$$u(r) = a_m r + \frac{b_m}{r^2}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \sim \varepsilon_0 \mathbf{x} \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty) \quad \longrightarrow \quad a_m = \varepsilon_0$$

$$u(r) = \varepsilon_0 r + \frac{b_m}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = 3\kappa_m \varepsilon_0 - \frac{4\mu_m b_m}{r^3}$$

Dans l'inclusion

$$u(r) = a_i r + \frac{b_i}{r^2}$$

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| < \infty \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0) \quad \longrightarrow \quad b_i = 0$$

$$\varepsilon_{rr} = a_i = \text{Cte} = \varepsilon_i$$

$$u(r) = \varepsilon_i r$$

$$\sigma_{rr} = 3\kappa_i \varepsilon_i$$

Solution du problème d'Eshelby (2/2)

Conditions de raccord à l'interface ($r = R$)

Continuité du déplacement

$$\varepsilon_0 R + \frac{b_m}{R^2} = \varepsilon_i R$$

Continuité du vecteur-contrainte

$$3\kappa_m \varepsilon_0 - \frac{4\mu_m b_m}{R^3} = 3\kappa_i \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = \frac{3\kappa_m + 4\mu_m}{3\kappa_i + 4\mu_m} \varepsilon_0$$

Deux estimations classiques

$$K^{\text{est}} \bar{\varepsilon} = K_m \bar{\varepsilon} + f_i (K_i - K_m) \frac{3K_m + 4\mu_m}{3K_i + 4\mu_m} \varepsilon_0$$

Estimation diluée

$$\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}$$



$$K^{\text{dil}} = K_m + f_i (K_i - K_m) \frac{3K_m + 4\mu_m}{3K_i + 4\mu_m}$$

Estimation de Mori-Tanaka

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_m$$

$$\varepsilon_i = \frac{3K_m + 4\mu_m}{3K_i + 4\mu_m} \varepsilon_0$$

$$(1 - f_i) \varepsilon_m + f_i \varepsilon_i = \bar{\varepsilon}$$



$$\left[(1 - f_i) + f_i \frac{3K_m + 4\mu_m}{3K_i + 4\mu_m} \right] \varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}$$

$$K^{\text{MT}} = K_m + f_i (K_i - K_m) \frac{3K_m + 4\mu_m}{3f_i K_m + 4\mu_m + 3(1 - f_i) K_i}$$

Schémas dilué et de MT pour des sphères

$$K^{\text{dil}} = K_m + f_i (K_i - K_m) \frac{3K_m + 4\mu_m}{3K_i + 4\mu_m} \quad K^{\text{MT}} = K_m + f_i (K_i - K_m) \frac{3K_m + 4\mu_m}{3f_i K_m + 4\mu_m + 3(1-f_i)K_i}$$

Commentaires

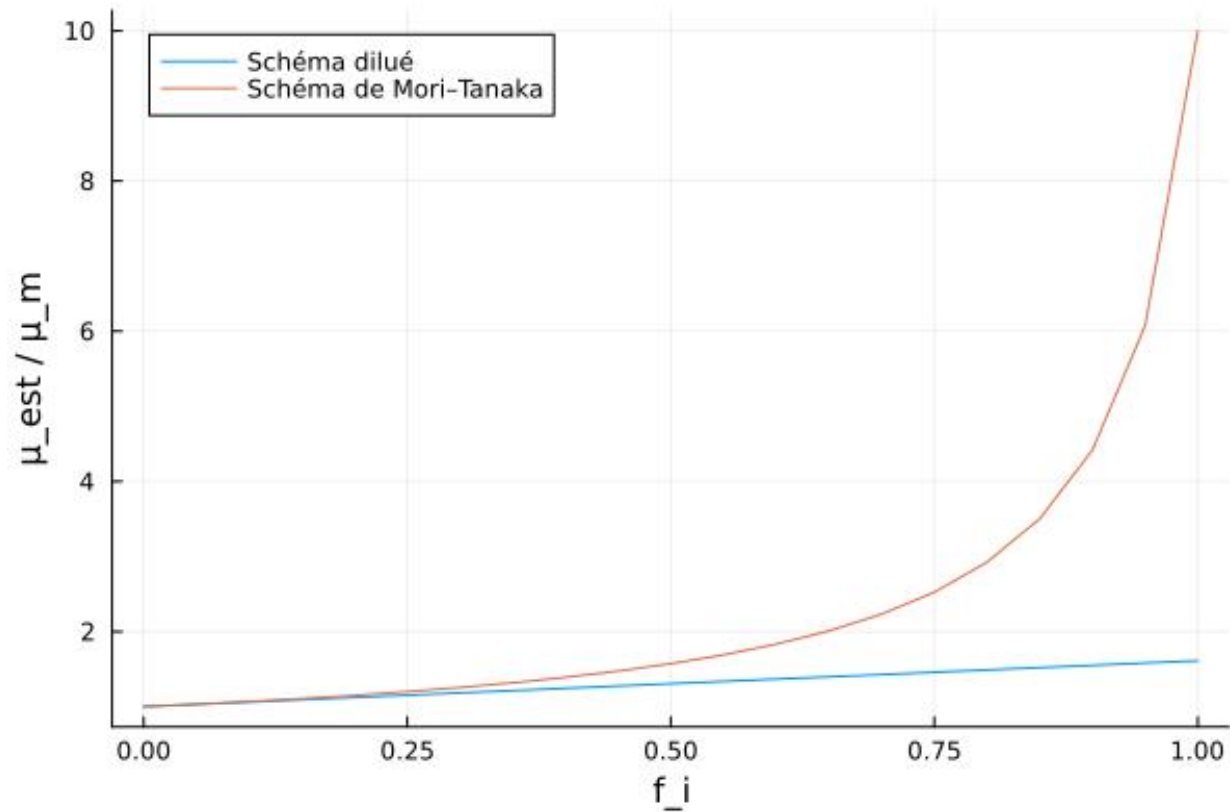
$(K^{\text{dil}} - K_m)$ et $(K^{\text{MT}} - K_m)$ sont du signe de $(K_i - K_m)$

quand $f_i = 0$: $K^{\text{dil}} = K^{\text{MT}} = K_m$

quand $f_i = 1$: $K^{\text{MT}} = K_i$

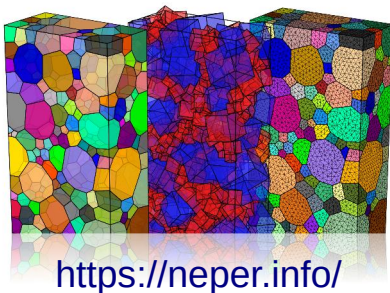
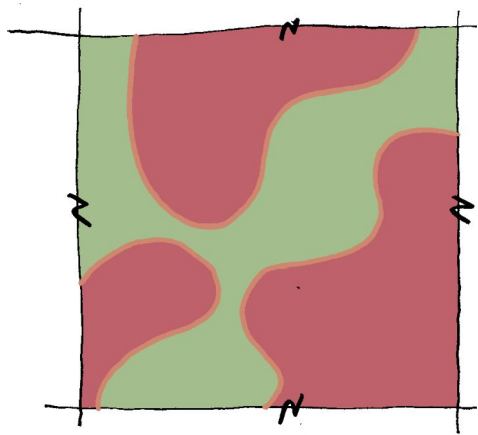
$$K^{\text{MT}} - K^{\text{dil}} = 3f_i^2 \frac{K_i - K_m}{3f_i K_m + 4\mu_m + 3(1-f_i)K_i} \frac{3K_m + 4\mu_m}{3K_i + 4\mu_m}$$

Comparaison des schémas

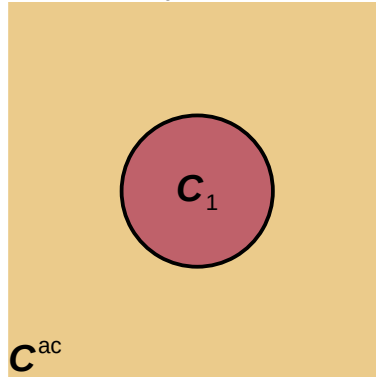


1.2 Composites pour lesquels aucune phase ne joue le rôle de matrice

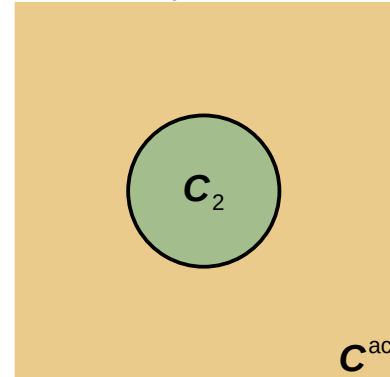
Le schéma autocohérent (1/2)



$$u(\mathbf{x}) \sim \varepsilon_0 \mathbf{x} \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty)$$



$$u(\mathbf{x}) \sim \varepsilon_0 \mathbf{x} \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty)$$



Milieu homogénéisé !

Le schéma autocohérent (2/2)

Pour une sollicitation hydrostatique

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} \delta$$



$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \delta$$

😬 à justifier !!!

Déformations

$$\varepsilon_1 = \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_1 + 4\mu^{\text{ac}}} \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_2 + 4\mu^{\text{ac}}} \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 = \left(f_1 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_1 + 4\mu^{\text{ac}}} + f_2 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_2 + 4\mu^{\text{ac}}} \right)^{-1} \bar{\varepsilon}$$

Contraintes

$$\sigma_1 = 3K_1 \varepsilon_1 = 3K_1 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_1 + 4\mu^{\text{ac}}} \varepsilon_0$$

$$\sigma_2 = 3K_2 \varepsilon_2 = 3K_2 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_2 + 4\mu^{\text{ac}}} \varepsilon_0$$

$$K^{\text{ac}} = \frac{f_1 K_1 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_1 + 4\mu^{\text{ac}}} + f_2 K_2 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_2 + 4\mu^{\text{ac}}}}{f_1 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_1 + 4\mu^{\text{ac}}} + f_2 \frac{3K^{\text{ac}} + 4\mu^{\text{ac}}}{3K_2 + 4\mu^{\text{ac}}}}$$

Moyennes

$$f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}$$

$$f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 = 3K^{\text{ac}} \bar{\varepsilon}$$

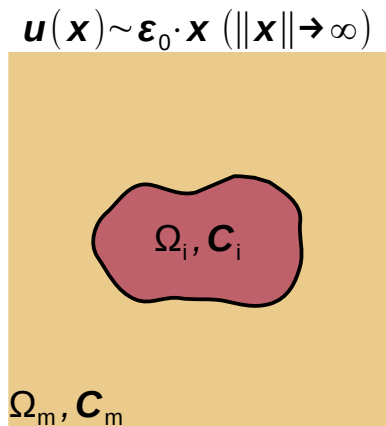


Équation **non-linéaire**
et **couplée**

2. Problème(s) d'Eshelby et tenseurs de Hill

2.1 Problèmes de l'inclusion et de l'inhomogénéité

Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby



La déformation moyenne dans l'inhomogénéité dépend linéairement de la déformation à l'infini !

$$\varepsilon_i^{\text{def}} = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{x \in \Omega_i} \varepsilon(x) dV_x = \mathbf{A}_i^\infty : \varepsilon_0$$

$\mathbf{A}_i^\infty$ dépend de la **forme**
 ne dépend pas de la **taille**
 dépend des raideurs (matrice et inclusion)

1. Inhomogénéité de forme quelconque

Pas de solution analytique ⇒ **Calcul numérique**

2. Inhomogénéité ellipsoïdale

Expression en fonction de la solution du problème de l'inclusion

$$\mathbf{A}_i^\infty = [\mathbf{I} + \mathbf{P}_i : (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m)]^{-1}$$

Problème de l'inclusion d'Eshelby

$$\begin{aligned}
 &u(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty) \\
 &\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_m : \varepsilon(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \Omega_i \\
 &\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_m : \varepsilon(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

La déformation moyenne
dans l'inhomogénéité
dépend linéairement de la
polarisation (constante) !

$$\varepsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\mathbf{x} \in \Omega_i} \varepsilon(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = -\mathbf{P}_i : \boldsymbol{\tau}$$

$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\mathbf{C}_m, \Omega_i)$

- dépend de la **forme**
- ne dépend pas de la **taille**
- dépend de la **raideur de la matrice**

1. Inclusion de forme quelconque

Pas de solution analytique $\Rightarrow$ **Calcul numérique**

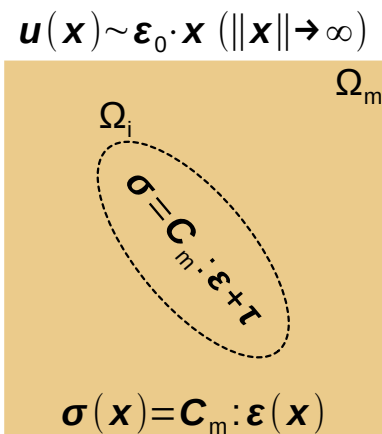
2. Inclusion ellipsoïdale

Expressions analytiques ou quasi-analytiques

Inclusions et inhomogénéités ellipsoïdales

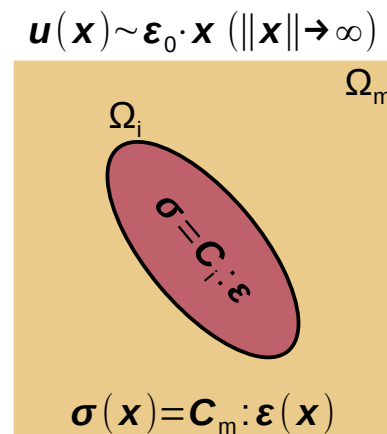
Quelles que soient les symétries matérielles de la matrice, la déformation est constante dans l'inclusion ou l'inhomogénéité

Inclusion ellipsoïdale



$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{P}_i : \boldsymbol{\tau}$$

Inhomogénéité ellipsoïdale



$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{A}_i^\infty : \boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\mathbf{I} + \mathbf{P}_i : (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m)]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_0$$

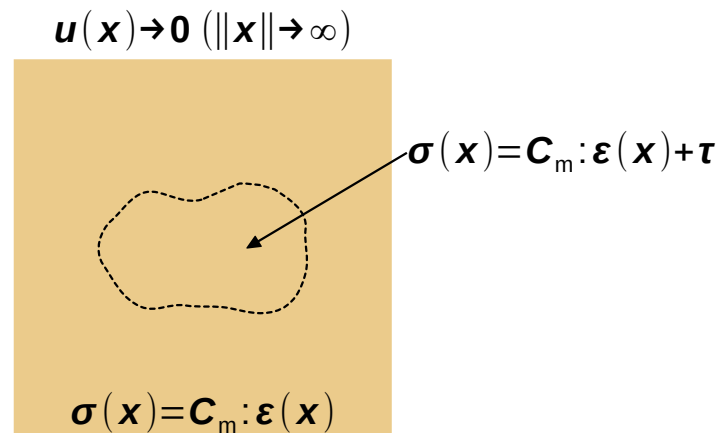
2.2 Tenseurs de Hill

Définition et propriétés

Définition

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3) \\
 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \operatorname{sym} \operatorname{grad} u(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3) \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}_m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_i) \\
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}_m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\tau} & (\mathbf{x} \in \Omega_i) \\
 u(\mathbf{x}) &\rightarrow 0 & (\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = -\mathbf{P}_i : \boldsymbol{\tau}$$



Propriétés

💡 $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\mathbf{C}_m, \Omega_i)$

💡 $\mathbf{P}(\mathbf{C}_m, \Omega_i) > \mathbf{C}_m > \mathbf{0}$

💡 $\mathbf{P}_i$ est symétrique, défini positif

💡 si $\Delta \mathbf{C} > \mathbf{0}$: $\mathbf{P}(\mathbf{C}_m, \Omega_i) > \mathbf{P}(\mathbf{C}_m + \Delta \mathbf{C}, \Omega_i) > \mathbf{0}$

💡 $\mathbf{P}(\lambda \mathbf{C}_m, \Omega_i) = \lambda^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{C}_m, \Omega_i)$

M. Bornert, T. Bretheau et P. Gilormini (2001). Homogénéisation en mécanique des matériaux. Hermès science

Expressions générales

Expression formelle à l'aide de l'opérateur de Green

$$\mathbf{P}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_i} \boldsymbol{\Gamma}_m^\infty(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{x}$$

En réalité, il faut prendre en compte la singularité à l'origine !

Formule de Willis (1977) pour un ellipsoïde

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}, \mathbf{a}) = \frac{(\det \mathbf{a})}{4\pi} \int_{\|\mathbf{n}\|=1} \frac{\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})^{-1} \otimes \mathbf{n}}{\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\|^3} d^2 \mathbf{n} \quad \|\mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{x}\| \leq 1$$

Sphère plongée dans une matrice isotrope

$$\mathbf{P}(3\kappa \mathbf{J} + 2\mu \mathbf{K}, \boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{3\kappa + 4\mu} \mathbf{J} + \frac{3}{5\mu} \frac{\kappa + 2\mu}{3\kappa + 4\mu} \mathbf{K}$$

Willis, J. R. (1977). J Mech Phys Sol 25(3), 185-202. DOI:10.1016/0022-5096(77)90022-9

Pour aller plus loin...

Ellipsoïde dans une matrice isotrope

J. D. Eshelby (1957). Proc Royal Soc London. Series A, 241(1226), 376-396. DOI:10.1098/rspa.1957.0133

Mura, T. (1987). Micromechanics of defects in solids. Kluwer Academic Publishers. DOI:10.1007/978-94-009-3489-4

P. Mu, Y. Nadot, C. Nadot-Martin, A. Chabod, I. Serrano-Munoz et C. Verdu (2014). Int J Fatigue, 63, 97-109.
DOI:10.1016/j.ijfatigue.2014.01.011

M. Vincent, C. Nadot-Martin, Y. Nadot et A. Dragon (2014). Int J Fatigue, 59, 176-187. DOI:10.1016/j.ijfatigue.2013.08.027

R. Serre, C. Nadot-Martin, P. Bocher (2025). Mech Mat, 201, 105194. DOI:10.1016/j.mechmat.2024.105194

Ellipsoïde dans une matrice quelconque

Parnell, W. J. (2016). J Elast, 125(2), 231-294. DOI:10.1007/s10659-016-9573-6

A. Pouya et A. Zaoui (2006). Int J Sol Struct, 43(16), 4937-4956. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2005.06.046

R. Masson (2008). Int J Sol Struct, 45(3), 757-769. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2007.08.035

Deux astuces pour le calcul numérique de P

Astuce n°1 : correction des conditions aux limites

A. Adessina, J.-F. Barthélémy, F. Lavergne et A. Ben Fraj (2017). Int J Eng Sci, 119, 1-15.
DOI:10.1016/j.ijengsci.2017.03.015

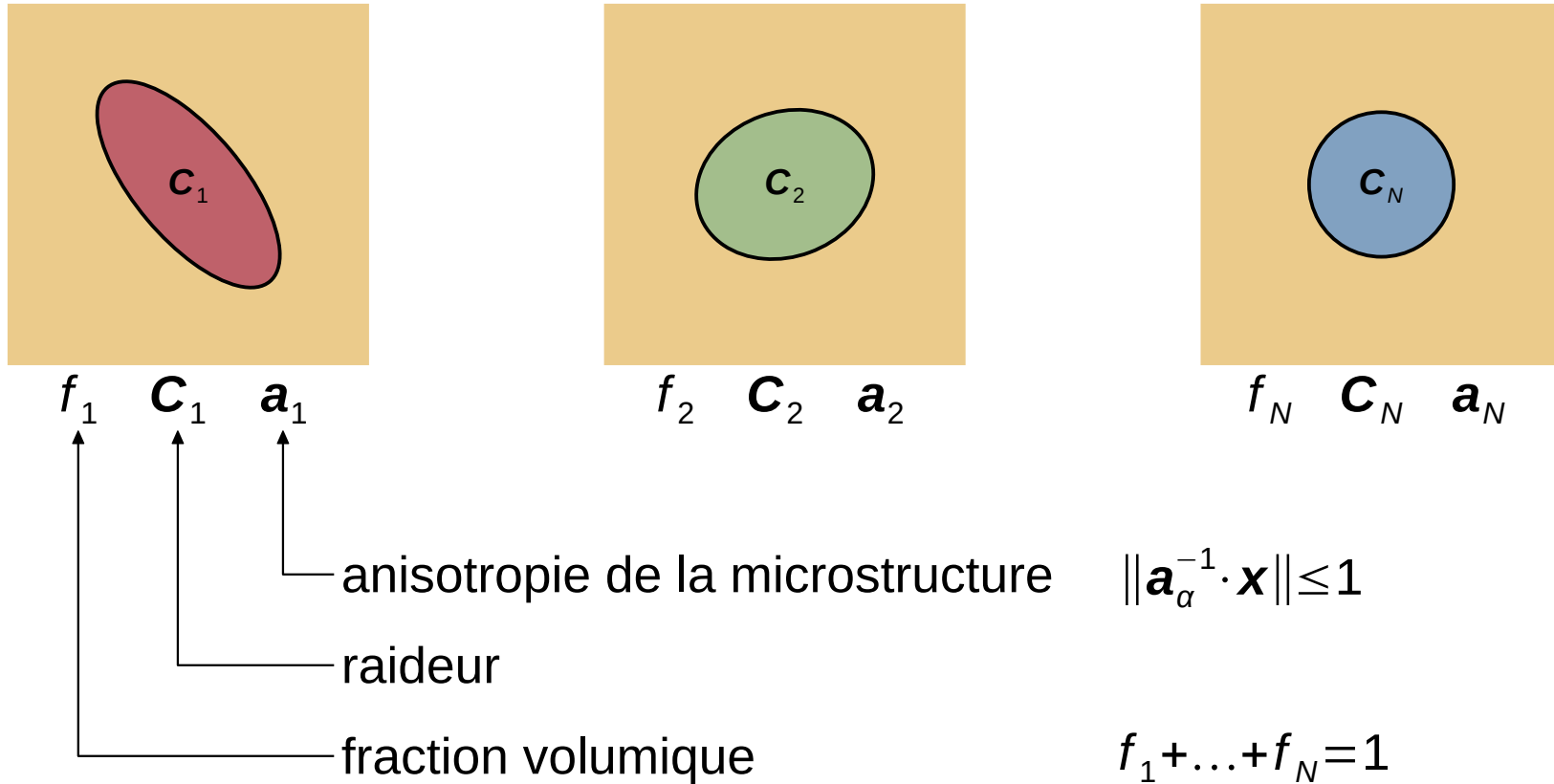
K. Du, L. Cheng, J.-F. Barthélémy, I. Sevostianov, A. Giraud et A. Adessina (2020). Int J Eng Science, 152, 103306.
DOI:10.1016/j.ijengsci.2020.103306

Astuce n°2 : modes de Fourier si inclusion axisymétrique

A. Martin, S. Brisard, S. Deleville et K. Sab (2023). J Comp Phys, 477, 111943.
DOI:10.1016/j.jcp.2023.111943

3. Matériaux multi-phasiques, anisotropies géométriques et matérielles

Notion de phase



Anisotropies géométriques et matérielles

Anisotropie matérielle

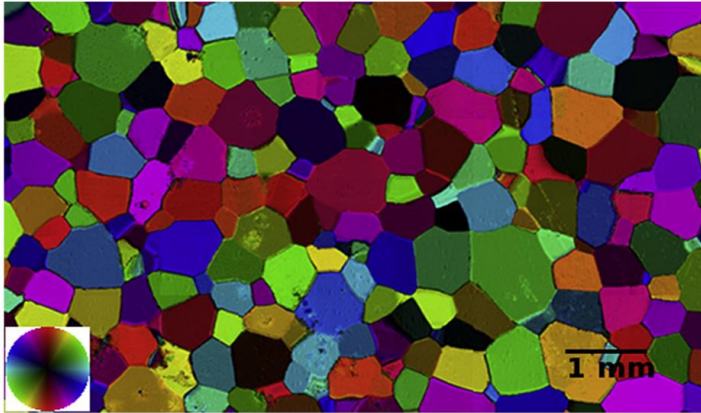


Fig. 5. Typical 2D microstructure of an ice polycrystal grown in the laboratory. The color wheel gives the color-code for the c-axis orientation.

M. Montagnat, O. Castelnau, P. D. Bons, S. H. Faria, O. Gagliardini, F. Gillet-Chaulet, F. Grennerat, A. Griera, R. A. Lebensohn, H. Moulinec, J. Roessiger et P. Suquet (2014). J Struct Geol, 61, 78-108.

DOI:10.1016/j.jsg.2013.05.002

M. Cocusse, M. Rosales, B. Maillet, R. Sidi-Boulenouar, E. Julien, S. Caré et P. Coussot (2022). Sci Adv, 8(19), eabm7830. DOI:10.1126/sciadv.abm7830

Anisotropie géométrique

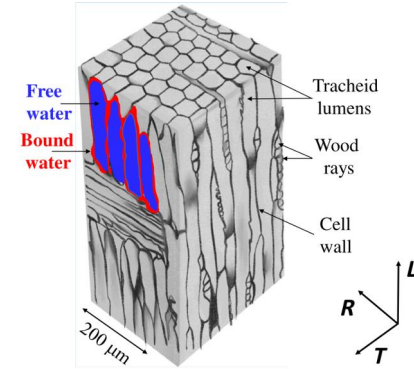


Fig. 1. Typical basic structure of Douglas fir wood. Scheme drawn from microtomograph image extract (70). The possible location of bound and free water is illustrated in a limited region. Note that only the macroporosity may be seen in such a scheme. The axes indicate the wood anisotropic directions: L, longitudinal (tree axis); R, radial; T, tangential.

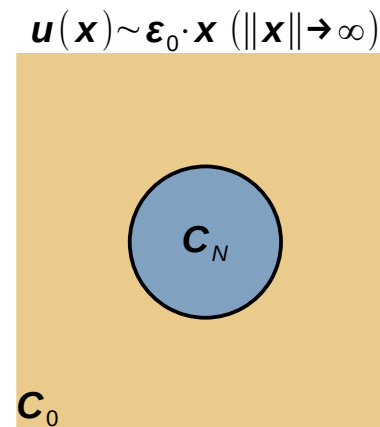
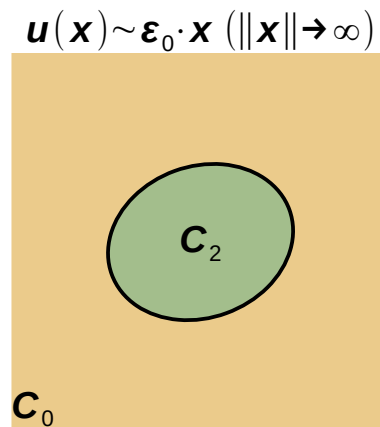
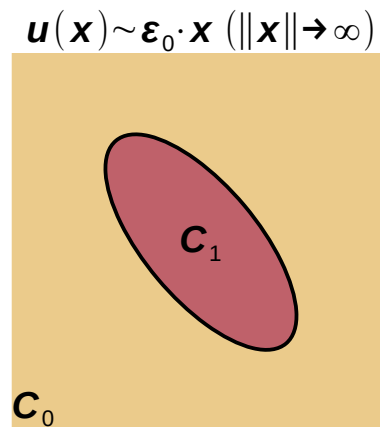
Géométrie des ellipsoïdes ?

La taille des ellipsoïdes n'a pas d'importance (pas de sens)

La forme (les proportions) des ellipsoïdes n'est pas nécessairement celle des « briques élémentaires » de chaque phase !!!

La géométrie de chaque ellipsoïde est un paramètre d'ajustement du modèle micromécanique

Estimat° basées sur la sol. d'Eshelby (1/3)



💡 Chaque phase est plongée dans un **milieu de référence homogène**, de raideur $\mathbf{C}_0$

💡 Déformation à l'infini : $\boldsymbol{\varepsilon}_0$

💡 Tenseur de Hill : $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}(\mathbf{C}_0, \mathbf{a}_\alpha)$ ← Tenseur de Hill de l'inclusion ellipsoïdale définie par $\mathbf{a}_\alpha$, plongée dans le milieu infini $\mathbf{C}_0$

💡 Déformation moyenne dans la phase α : $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = [\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_0)]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_0$

Estimat° basées sur la sol. d'Eshelby (2/3)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha &= (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \mathbf{P}_\alpha &= \mathbf{P}(\mathbf{C}_0, \mathbf{a}_\alpha) \\ \delta \mathbf{C}_\alpha &= \mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_0 \\ f_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + f_N \boldsymbol{\varepsilon}_N &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^N f_\alpha (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\alpha^{\text{est}} &= [\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_0)]^{-1} : \mathbf{A}_0^{\text{est}} \\ \mathbf{C}^{\text{est}} &= \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : \mathbf{A}_\alpha^{\text{est}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_0 &= \mathbf{A}_0^{\text{est}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbf{A}_0^{\text{est}} &= \left[\sum_{\alpha=1}^N f_\alpha (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \right]^{-1}\end{aligned}$$

Estimat° basées sur la sol. d'Eshelby (3/3)

Formules essentielles

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{C}_\alpha &= \mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_0 & \mathbf{A}_0^{\text{est}} &= \left[\sum_\alpha f_\alpha (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \right]^{-1} & \mathbf{A}_\alpha^{\text{est}} &= (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} : \mathbf{A}_0^{\text{est}} \\ \mathbf{P}_\alpha &= \mathbf{P}(\mathbf{C}_0, \mathbf{a}_\alpha) & \mathbf{C}^{\text{est}} &= \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : \mathbf{A}_\alpha^{\text{est}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}^{\text{est}} = \left[\sum_\alpha f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \right] : \left[\sum_\beta f_\beta (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\beta : \delta \mathbf{C}_\beta)^{-1} \right]^{-1}$$

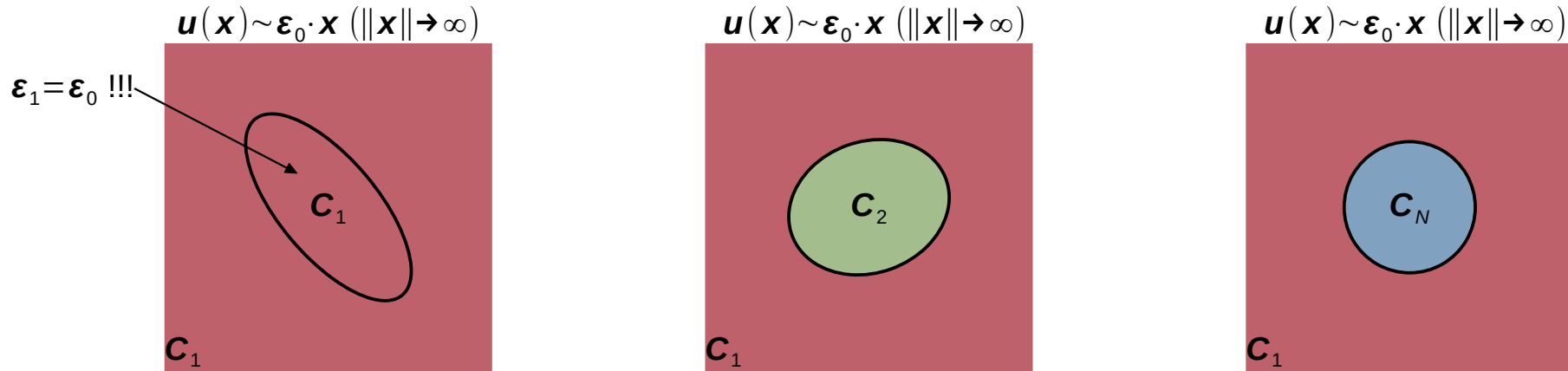
Une autre expression de l'estimation de la raideur homogénéisée

$$\mathbf{C}^{\text{est}} = \mathbf{C}_0 + \left[\sum_\alpha f_\alpha \delta \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \right] : \left[\sum_\beta f_\beta (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\beta : \delta \mathbf{C}_\beta)^{-1} \right]^{-1}$$

Preuve

$$\begin{aligned}\sum_\alpha f_\alpha \delta \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} &= \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} - \mathbf{C}_0 : \sum_\alpha f_\alpha (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \\ &= \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : \mathbf{A}_\alpha^{\text{est}} : (\mathbf{A}_0^{\text{est}})^{-1} - \mathbf{C}_0 : (\mathbf{A}_0^{\text{est}})^{-1} = (\mathbf{C}^{\text{est}} - \mathbf{C}_0) : (\mathbf{A}_0^{\text{est}})^{-1}\end{aligned}$$

Estimation de Mori–Tanaka (1/2)



Le milieu de référence est l'une des phases (par ex. $\alpha = 1$),
identifiée comme la **matrice**

$$\longrightarrow P_\alpha = P(c_1, a_\alpha)$$

La déformation auxiliaire coïncide avec la déformation dans la matrice !

Mori, T. et Tanaka, K. (1973). Acta Metallurgica, 21(5), 571-574. DOI:10.1016/0001-6160(73)90064-3

Benveniste, Y. (1987). Mech Mat 6(2), 147-157. DOI:10.1016/0167-6636(87)90005-6

Estimation de Mori–Tanaka (2/2)

$$\mathbf{C}^{\text{MT}} = \mathbf{C}_1 + \left[\sum_{\alpha} f_{\alpha} \delta \mathbf{C}_{\alpha} : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\alpha} : \delta \mathbf{C}_{\alpha})^{-1} \right] : \left[\sum_{\beta} f_{\beta} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} \right]^{-1} \quad \text{avec} \quad \delta \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$$

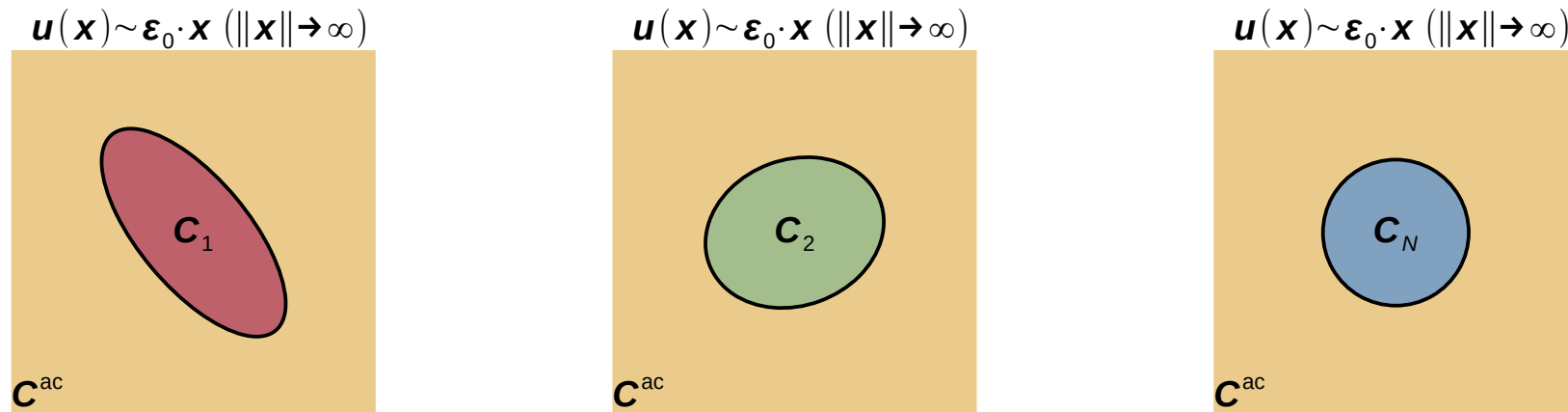
$$\sum_{\beta=1}^N f_{\beta} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} = f_1 \mathbf{I} + \sum_{\beta=2}^N f_{\beta} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} = \mathbf{I} + \sum_{\beta=2}^N f_{\beta} [(\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} - \mathbf{I}]$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} - \mathbf{I} = [\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})] : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} = -\mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta} : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1}$$

$$\sum_{\beta=1}^N f_{\beta} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} = \mathbf{I} - \sum_{\beta=2}^N f_{\beta} \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta} : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1}$$

$$\mathbf{C}^{\text{MT}} = \mathbf{C}_1 + \left[\sum_{\alpha=2}^N f_{\alpha} \delta \mathbf{C}_{\alpha} : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\alpha} : \delta \mathbf{C}_{\alpha})^{-1} \right] : \left[\mathbf{I} - \sum_{\beta=2}^N f_{\beta} \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta} : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\beta} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} \right]^{-1}$$

Estimation auto-cohérente (1/2)



Le milieu de référence est le **milieu homogénéisé** $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}^{\text{ac}}$ $\longrightarrow$ $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}(\mathbf{C}^{\text{ac}}, \mathbf{a}_\alpha)$

$$\mathbf{C}^{\text{ac}} = \mathbf{C}_0 + \left[\sum_\alpha f_\alpha \delta \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \right] : \left[\sum_\beta f_\beta (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\beta : \delta \mathbf{C}_\beta)^{-1} \right]^{-1}$$

$$\sum_\alpha f_\alpha \delta \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} = \mathbf{0}$$

Équation non-linéaire ! (Résolution par point fixe par exemple)

E. Kröner (1977). J Mech Phys Sol, 25(2), 137-155. DOI:10.1016/0022-5096(77)90009-6

Estimation auto-cohérente (2/2)

Cas où toutes les phases ont la même « forme »

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_N = \mathbf{a} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \dots = \mathbf{P}_N = \mathbf{P}(\mathbf{C}^{\text{ac}}, \mathbf{a})$$

$$\mathbf{A}_0^{\text{est}} = \left[\sum_{\alpha} f_{\alpha} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{\alpha} : \delta \mathbf{C}_{\alpha})^{-1} \right]^{-1} = \mathbf{I}$$

La déformation auxiliaire coïncide avec la déformation macroscopique

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} \delta \mathbf{C}_{\alpha} : (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}_{\alpha})^{-1} = \mathbf{0}$$

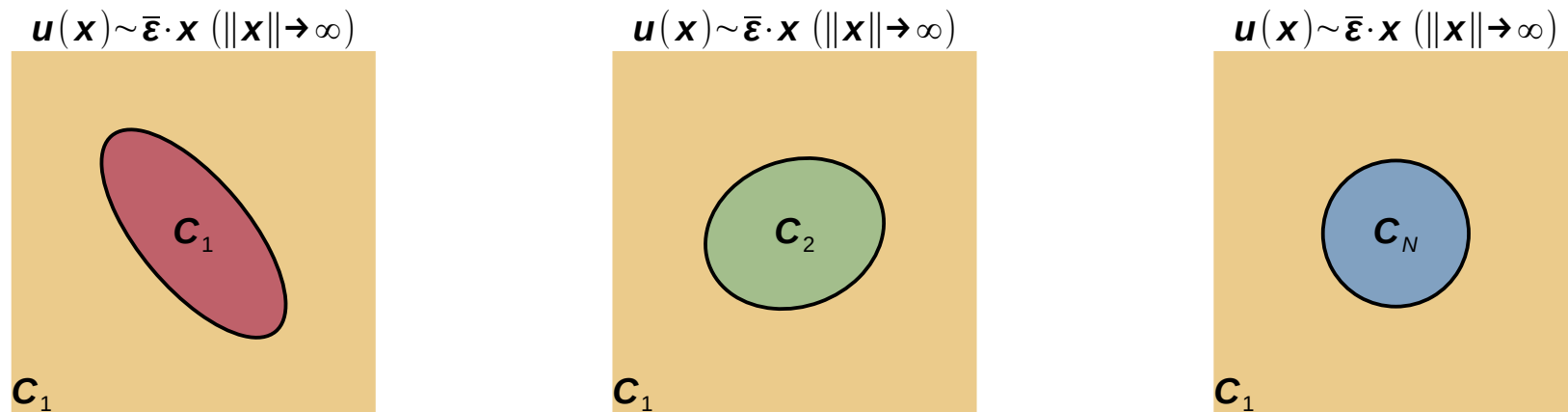
$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}_{\alpha} : (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}_{\alpha})^{-1} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}_{\alpha}) : (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}_{\alpha})^{-1} - \sum_{\beta} f_{\beta} (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{\beta} f_{\beta} (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}_{\beta})^{-1} = \mathbf{I}$$

Preuve

Et l'estimation diluée ? (1/2)



- 💡 Le milieu de référence est l'une des phases (par ex. $\alpha = 1$), identifiée comme la **matrice** $\Rightarrow P_\alpha = P(C_1, a_\alpha)$
- 💡 Déformation à l'infini : $\bar{\epsilon}$ (déformation macroscopique)
- 💡 Déformation moyenne dans la matrice : $\epsilon_1 = \bar{\epsilon}$
- 💡 Déformation moyenne dans la phase $\alpha \neq 1$: $\epsilon_\alpha = [I + P_\alpha : (C_\alpha - C_1)]^{-1} : \bar{\epsilon}$

Et l'estimation diluée ? (2/2)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha &= [\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_1)]^{-1} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\alpha \neq 1) \\ \mathbf{P}_\alpha &= \mathbf{P}(\mathbf{C}_1, \mathbf{Q}_\alpha)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\alpha^{\text{dil}} &= [\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_1)]^{-1} \\ \mathbf{C}^{\text{dil}} &= \mathbf{C}_1 + \sum_{\alpha=2}^{N-1} f_\alpha (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_1) : \mathbf{A}_\alpha^{\text{dil}}\end{aligned}$$

$$f_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + f_N \boldsymbol{\varepsilon}_N \neq \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Symétrie ?

 Les estimations diluée et auto-cohérente de la raideur homogénéisée sont toujours symétriques !

 L'estimation de Mori–Tanaka de la raideur homogénéisée n'est en général pas symétrique !

 La symétrie de l'estimation de Mori–Tanaka de la raideur homogénéisée est garantie dans au moins deux cas

 Toutes les phases ont la même forme : $\mathbf{P}_2 = \dots = \mathbf{P}_N$

 Solide poreux à matrice homogène : $\mathbf{C}_2 = \dots = \mathbf{C}_N = \mathbf{0}$

Y. Benveniste, G. J. Dvorak et T. Chen (1991). J Mech Phys Sol 39(7), 927-946. DOI:10.1016/0022-5096(91)90012-D

M. Ferrari (1991). Mech Mat 11(3), 251-256. DOI:10.1016/0167-6636(91)90006-L

J. Schjødt-Thomsen et R. Pyrz (2001). Mech Mat 33(10), 531-544. DOI:10.1016/S0167-6636(01)00072-2

4. Quelques « astuces » classiques

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Exemple

Pour un ellipsoïde, montrer que $\delta \mathbf{C} : \mathbf{A}^\infty$ est symétrique

$$\mathbf{A}^\infty = (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C})^{-1}$$

$$\delta \mathbf{C} : \mathbf{A}^\infty = \delta \mathbf{C} : (\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C})^{-1} = [(\mathbf{I} + \mathbf{P} : \delta \mathbf{C}) : \delta \mathbf{C}^{-1}]^{-1} = (\delta \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{P})^{-1}$$

$\delta \mathbf{C}$ et $\mathbf{P}$ sont symétriques. CQFD

Tenseurs isotropes

Tenseurs d'ordre 4, isotropes, symétries mineures et majeure

Projecteurs isotropes d'ordre 4

$$\mathbf{J} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \quad \mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{J} \quad \mathbf{J} : \mathbf{J} = \mathbf{J} \quad \mathbf{K} : \mathbf{K} = \mathbf{K} \quad \mathbf{J} : \mathbf{K} = \mathbf{K} : \mathbf{J} = 0$$

Opérations sur les tenseurs isotropes

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \alpha \mathbf{J} + \beta \mathbf{K} \\ \mathbf{T}' &= \alpha' \mathbf{J} + \beta' \mathbf{K} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T} : \mathbf{T}' = \alpha \alpha' \mathbf{J} + \beta \beta' \mathbf{K}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{\mathbf{J}}{\alpha} + \frac{\mathbf{K}}{\beta}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= 3\kappa \mathbf{J} + 2\mu \mathbf{K} \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{3\kappa + 4\mu} \mathbf{J} + \frac{3}{5\mu} \frac{\kappa + 2\mu}{3\kappa + 4\mu} \mathbf{K} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} : \delta \mathbf{C} = \left(1 + \frac{3\delta\kappa}{3\kappa + 4\mu} \right)^{-1} \mathbf{J} + \left(1 + \frac{6\delta\mu}{5\mu} \frac{\kappa + 2\mu}{3\kappa + 4\mu} \right)^{-1} \mathbf{K}$$

Tenseurs isotropes transverses

Walpole à la rescousse !

$$\begin{aligned}
 p &= n \otimes n & E_1 &= p \otimes p & E_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} p \otimes q & E_6 &= 2I : (n \otimes q \otimes n) : I & E_5 &= I - E_1 - E_2 - E_6 \\
 q &= \delta - p & E_2 &= \frac{1}{2} q \otimes q & E_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} q \otimes p
 \end{aligned}$$

Représentation pratique

$$T = \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_6 E_6 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \alpha_5, \alpha_6 \right\} = \{A, \alpha_5, \alpha_6\}$$

Produit contracté

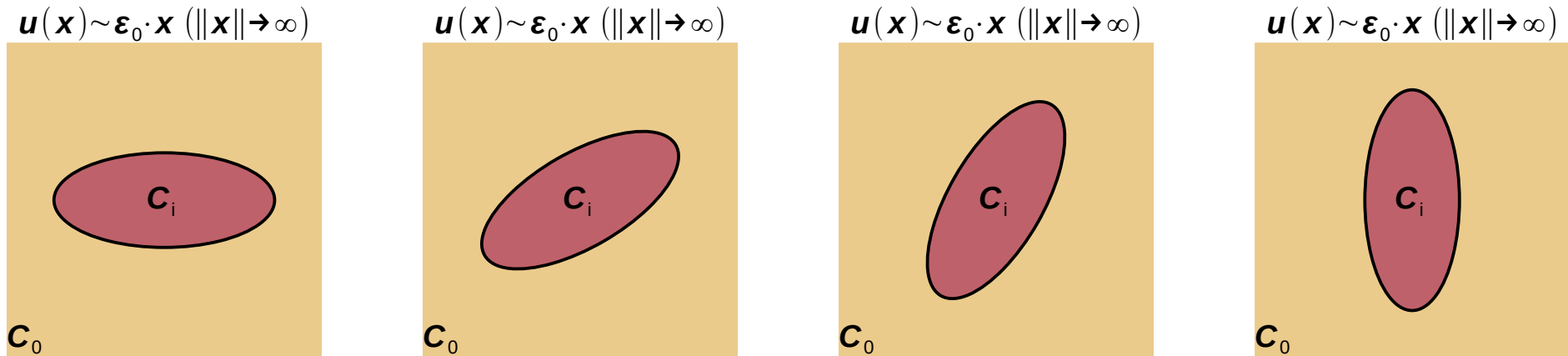
$$\begin{aligned}
 T &= \{A, \alpha_5, \alpha_6\} & T : T' &= \{AA', \alpha_5 \alpha_5', \alpha_6 \alpha_6'\} \\
 T' &= \{A', \alpha_5', \alpha_6'\}
 \end{aligned}$$

   **DANGER : il existe au moins deux bases de Walpole**   

Walpole, L. J. (1984). Proc Royal Soc. A. Math and Phys Sci, 391(1800), 149-179. DOI:10.1098/rspa.1984.0008

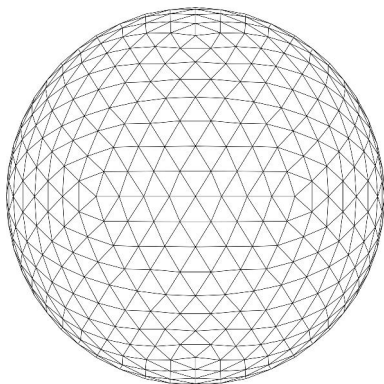
Distribution angulaire (1/2)

Discrétiser la fonction de distribution angulaire : une classe = une phase !



J. Sanahuja, L. Dormieux et G. Chanvillard (2007). Cement and Concrete Research, 37(10), 1427-1439.
DOI:10.1016/j.cemconres.2007.07.003

Distribution angulaire (2/2)



Classes d'orientation ?

💡 Raffinements successifs d'un icosaèdre

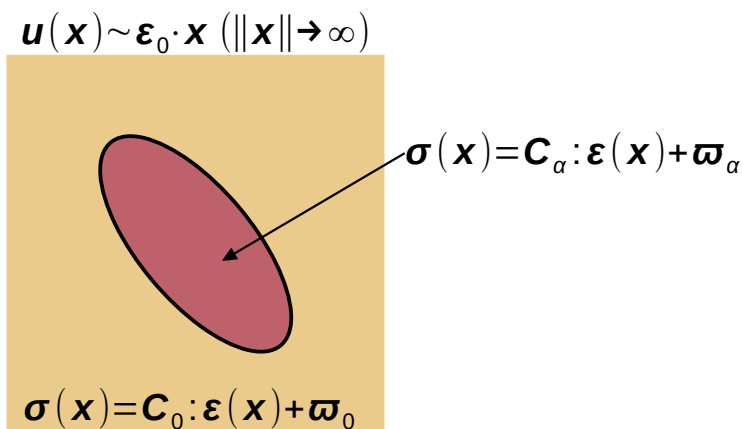
💡 Poids de chaque classe = aire du triangle **curviligne**

D'autres approches sont possibles !

B. Pichler, C. Hellmich (2010). J Eng Mech, 136(8), 1043-1053. DOI:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000138

Déformations libres, précontraintes

Problème d'Eshelby généralisé



$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^\infty : (\boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{P}_\alpha : \delta \boldsymbol{\varpi}_\alpha)$$

B. Pichler, C. Hellmich (2010). J Eng Mech, 136(8), 1043-1053. DOI:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000138

Modèles multi-échelles

470

B. Pichler, C. Hellmich / *Cement and Concrete Research* 41 (2011) 467–476

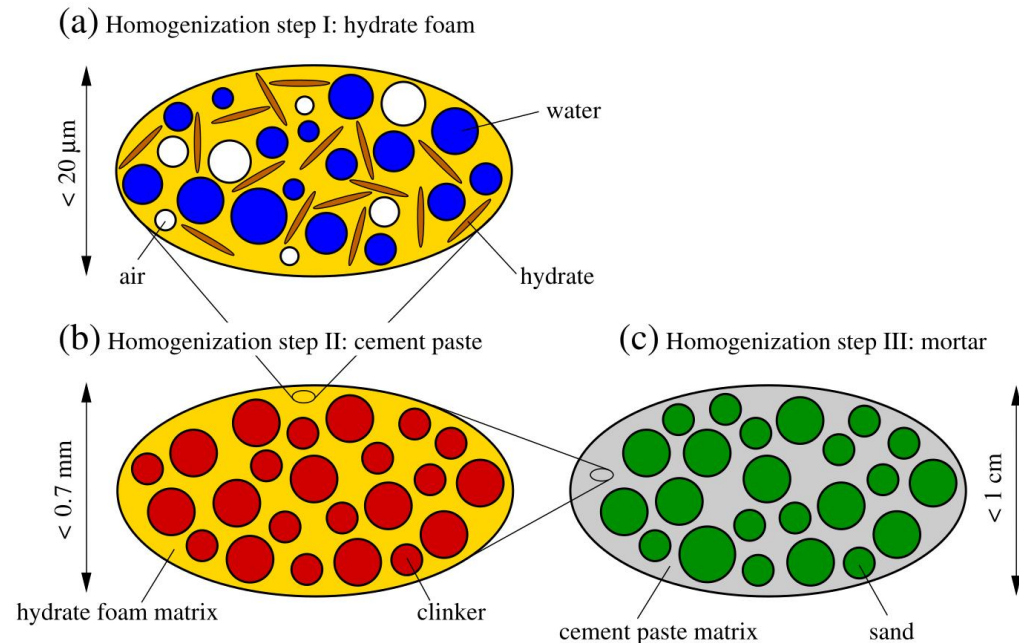


Fig. 1. Micromechanical representation of cement paste and mortar through a two-step and a three-step homogenization scheme, respectively: (a) polycrystalline RVE of “hydrate foam” built up of spherical water and air phases, as well as of needle-shaped hydrate phases oriented uniformly in all space directions (modeled by self-consistent scheme); (b) RVE of matrix-inclusion composite “cement paste” where a spherical clinker phase is embedded in a hydrate foam matrix (modeled by Mori–Tanaka scheme); (c) RVE of matrix-inclusion composite “mortar” where a spherical sand phase is embedded in a cement paste matrix (modeled by Mori–Tanaka scheme); all schematic 2D sketches refer to 3D volume elements.

Quand papier et crayon ne suffisent plus !

Echoes

Extended Calculator of HOmogenization Schemes

AUTHOR

Jean-François Barthélémy

PUBLISHED

January 15, 2025

Welcome

The library `echoes` allows to implement various mean-field homogenization schemes of random media involving different types of heterogeneities in the framework of elasticity, conductivity, viscoelasticity as well as nonlinear homogenization.



This book gathers tutorials presenting the main features of the library:

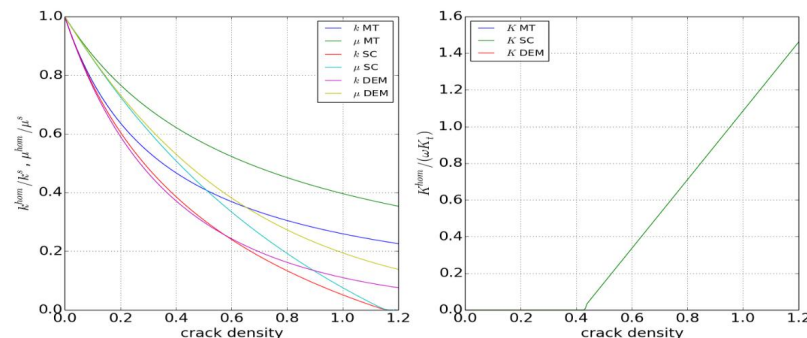
- elements of tensor calculus,
- Hill and Eshelby tensors and their derivatives with respect to reference medium moduli,
- concentration problems,
- RVEs and schemes in linear homogenization,
- extension to nonlinear homogenization,
- extension to linear time-dependent behaviors.

DOI:10.5281/zenodo.10559657

<https://jfbbarthelemy.github.io/echoes/>

Élasticité et perméabilité d'un milieu fissuré

```
omega=1.e-3 ; Cs=stiff_Enu(1.,0.2) ; kt=1. ; kn=1. ; Kc=tensor([kt,kt,kn]) ; Ko=1.e-10*tId2
ver=rve(matrix="SOLID")
ver["SOLID"]=ellipsoid(shape=spherical,prop={"C":Cs,"K":Ko})
ver["CRACK"]=crack(shape=spheroidal(omega),symmetrize=[ISO],prop={"C":tZ4,"K":Kc},density=0.6)
C=homogenize(prop="C",rve=ver,scheme=SC,epsrel=1.e-6,maxnb=300);print(C.k/Cs.k)#0.240
K=homogenize(prop="K",rve=ver,scheme=SC,epsrel=1.e-6,maxnb=300);print(K.param[0]/omega)#0.335
```



Fissures

La fissure vue comme un ellipsoïde (très, très) aplati

2.1. Cas des fissures ouvertes ($\mathbb{C}^f = 0$)

Soit a le rayon de l'ellipsoïde modélisant la fissure, c la demi-longueur du petit axe dans sa configuration actuelle, $\omega = c/a$ le rapport d'aspect. N désignant la densité volumique de fissures de la famille considérée, sa fraction volumique est $\phi = \frac{4}{3}\pi a^2 c N$. ϕ est fonction du niveau d'ouverture de la fissure. On introduit le paramètre de densité de fissures $\varepsilon = Na^3$ [2]. La fraction volumique des fissures s'écrit encore $\phi = \frac{4}{3}\pi \varepsilon \omega$. Compte tenu de (3) et (4), le tenseur d'élasticité homogénéisé tangent s'écrit :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \frac{4\pi}{3} \varepsilon \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\omega^s)^{-1} \right) \quad (5)$$

A première vue, le tenseur $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ semble dépendre du rapport d'aspect ω en configuration actuelle. Cependant, on montre que la quantité $\omega(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\omega^s)^{-1}$ admet une limite $\mathbb{T}$ quand $\omega \rightarrow 0$. De plus, l'approximation $\omega(\mathbb{I} - \mathbb{S}_\omega^s)^{-1} \approx \mathbb{T}$ est licite dans le domaine des faibles valeurs de ω qui correspond précisément au modèle géométrique de fissures aplaties. On a donc

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s : \left(\mathbb{I} - \frac{4}{3} \pi \varepsilon \mathbb{T} \right) \quad \text{avec } \mathbb{T} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega (\mathbb{I} - \mathbb{S}_\omega^s)^{-1} \quad (6)$$

V. Deudé, L. Dormieux, D. Kondo et V. Pensée (2002). Comptes Rendus Mécanique, 330, 587-592.

J.-F. Barthélémy, I. Sevostianov, A. Giraud et E. N. Vilchevskaya (2023). Math Mech Sol, 10812865221150771.
DOI:10.1177/10812865221150771

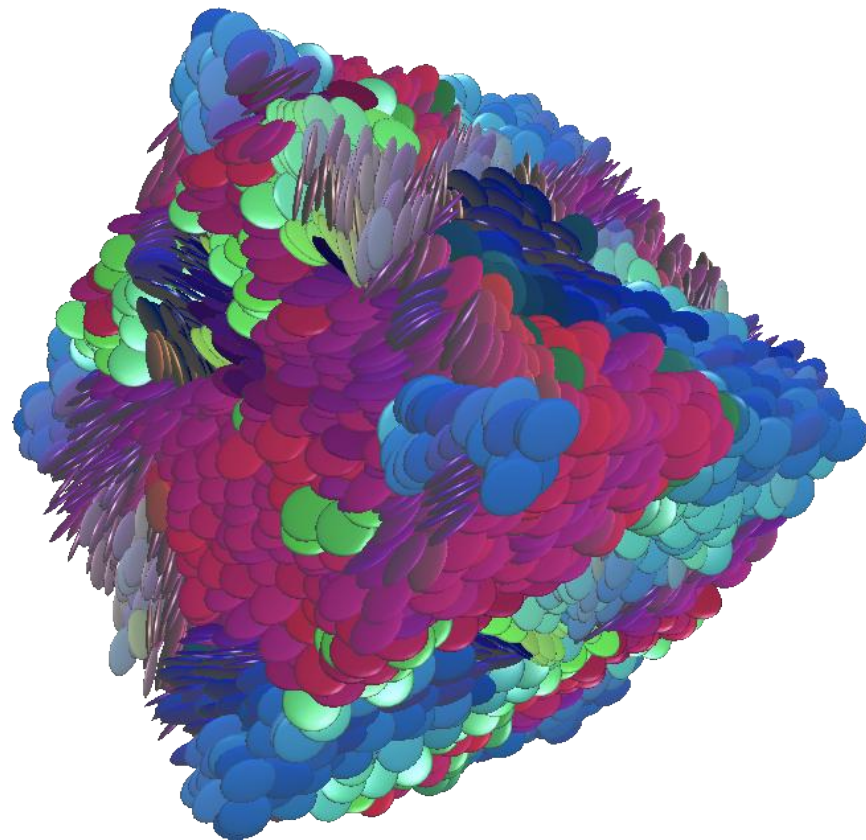
5. Approches variationnelles : bornes de Hashin et Shtrikman, bornes de Ponte Castañeda et Willis

Estimations basées sur la solution d'Eshelby

Inhomogénéité UNIQUE plongée dans
un milieu homogène infini

Pas de corrélations
entre inhomogénéités

Interactions prises en compte
au mieux de façon très approchée



L'équation de Lippmann–Schwinger en une planche !

Problème auxiliaire
de l'homogénéisation

Problème auxiliaire
du problème auxiliaire

Opérateur de Green

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{sym} \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \text{ pour } \boldsymbol{x} \in \partial \Omega \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\tau}$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{sym} \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{x} \text{ pour } \boldsymbol{x} \in \partial \Omega \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Gamma}_0 (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)^{-1} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\tau} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \boldsymbol{\varepsilon} \end{array}$$

Interactions et équation de LS

Équation de LS (matrice comme milieu de réf.)

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Gamma}_m (\mathbf{C} - \mathbf{C}_m) \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Notation

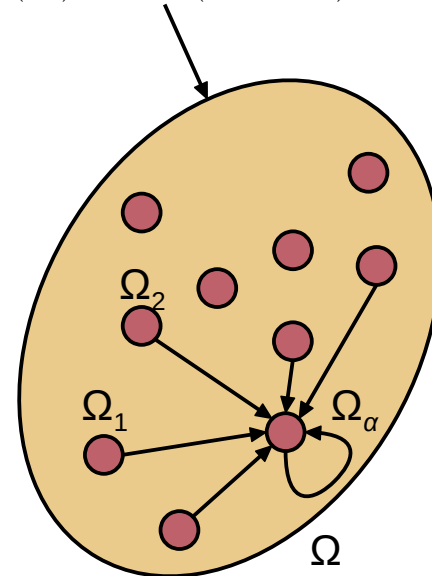
$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_\alpha \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Interactions

Pour tout $\mathbf{x} \in \Omega_\alpha$: $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}) + \sum_{\beta} [\boldsymbol{\Gamma}_m (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m) \boldsymbol{\varepsilon}_\beta](\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{x}) + [\boldsymbol{\Gamma}_m (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m) \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha](\mathbf{x}) + \sum_{\beta \neq \alpha} [\boldsymbol{\Gamma}_m (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_m) \boldsymbol{\varepsilon}_\beta](\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega)$$



L'équation de LS : formulation faible

Équation de LS en déformation

$$\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Gamma}_0 (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Formulation forte

Trouver $\boldsymbol{\tau}$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$

$$[\mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}_0]^{-1} : \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Équation de LS en polarisation

$$(\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)^{-1} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\tau} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \boldsymbol{\varepsilon}$$

Notation

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$$

Formulation faible de l'équation de Lippmann–Schwinger

Trouver $\boldsymbol{\tau}$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\varpi}$

$$\langle \boldsymbol{\varpi}, (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)^{-1} \boldsymbol{\tau} \rangle + \langle \boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\tau} \rangle = \langle \boldsymbol{\varpi}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$$

Principe de Hashin et Shtrikman (1/2)

Formulation faible de l'équation de Lippmann–Schwinger

Trouver $\boldsymbol{\tau}$ tel que, pour tout $\boldsymbol{\varpi}$

$$\langle \boldsymbol{\varpi}, (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)^{-1} \boldsymbol{\tau} \rangle + \langle \boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\tau} \rangle = \langle \boldsymbol{\varpi}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$$

Fonctionnelle de Hashin et Shtrikman

$$\text{HS}(\boldsymbol{\varpi}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}_0 : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \langle \boldsymbol{\varpi}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varpi}, (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)^{-1} \boldsymbol{\varpi} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\Gamma}_0 \boldsymbol{\varpi} \rangle$$

Stationnarité de la fonctionnelle de HS

$$\frac{\partial \text{HS}}{\partial \boldsymbol{\varpi}}(\boldsymbol{\tau}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad \text{et} \quad \text{HS}(\boldsymbol{\tau}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}^{\text{hom}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Z. Hashin et S. Shtrikman (1962). J Mech Phys Sol, 10(4), 335-342. DOI:10.1016/0022-5096(62)90004-2

J. R. Willis (1977). J Mech Phys Sol 25(3), 185-202. DOI:10.1016/0022-5096(77)90022-9

Principe de Hashin et Shtrikman (2/2)

Stationnarité de la fonctionnelle de HS

$$\frac{\partial \text{HS}}{\partial \boldsymbol{\varpi}}(\boldsymbol{\tau}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad \text{et} \quad \text{HS}(\boldsymbol{\tau}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}^{\text{hom}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Principe d'extremum

Si $\mathbf{C} \leq \mathbf{C}_0$ HS est **maximale** en $\boldsymbol{\tau}$ $\text{HS}(\boldsymbol{\varpi}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \leq \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}^{\text{hom}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pour tout $\boldsymbol{\varpi}$

Si $\mathbf{C} \geq \mathbf{C}_0$ HS est **minimale** en $\boldsymbol{\tau}$ $\text{HS}(\boldsymbol{\varpi}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}^{\text{hom}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pour tout $\boldsymbol{\varpi}$

Pas de condition d'admissibilité du champ-test !

Z. Hashin et S. Shtrikman (1962). J Mech Phys Sol, 10(4), 335-342. DOI:10.1016/0022-5096(62)90004-2

J. R. Willis (1977). J Mech Phys Sol 25(3), 185-202. DOI:10.1016/0022-5096(77)90022-9

Polarisations constantes par phase

Choix des champs tests

$$\boldsymbol{\varpi}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \chi_{\alpha}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varpi}_{\alpha} \quad \text{HS}(\boldsymbol{\varpi}_1, \dots, \boldsymbol{\varpi}_N; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

Stationnarité de la fonctionnelle

$$\frac{\partial \text{HS}}{\partial \boldsymbol{\varpi}_{\alpha}}(\boldsymbol{\varpi}_1^{\star}, \dots, \boldsymbol{\varpi}_N^{\star}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad \text{HS}(\boldsymbol{\varpi}_1^{\star}, \dots, \boldsymbol{\varpi}_N^{\star}; \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}^{\text{HS}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Si la distribution des phases est (faiblement) isotrope

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}(\mathbf{C}_0, \boldsymbol{\delta})$$

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{C}_{\alpha} = \mathbf{C}_{\alpha} - \mathbf{C}_0$$

$$\mathbf{C}^{\text{HS}} = \left[\sum_{\alpha} f_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_0 : \boldsymbol{\delta} \mathbf{C}_{\alpha})^{-1} \right] : \left[\sum_{\beta} f_{\beta} (\mathbf{I} + \mathbf{P}_0 : \boldsymbol{\delta} \mathbf{C}_{\beta})^{-1} \right]^{-1}$$

Z. Hashin et S. Shtrikman (1962). J Mech Phys Sol, 10(4), 343-352. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(62\)90005-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(62)90005-4)

J. R. Willis (1977). J Mech Phys Sol 25(3), 185-202. DOI:10.1016/0022-5096(77)90022-9

Bornes de Hashin et Shtrikman

Borne supérieure sur les modules homogénéisés

$$\mathbf{C} \leq \mathbf{C}_0^+ \quad \mathbf{C}^{\text{hom}} \leq \mathbf{C}^{\text{HS}+} \quad \mathbf{P}_0^+ = \mathbf{P}(\mathbf{C}_0^+, \boldsymbol{\delta}) \quad \delta \mathbf{C}_\alpha^+ = \mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_0^+$$

$$\mathbf{C}^{\text{HS}+} = \left[\sum_\alpha f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_0^+ : \delta \mathbf{C}_\alpha^+)^{-1} \right] : \left[\sum_\beta f_\beta (\mathbf{I} + \mathbf{P}_0^+ : \delta \mathbf{C}_\beta^+)^{-1} \right]^{-1}$$

Borne inférieure sur les modules homogénéisés

$$\mathbf{C} \geq \mathbf{C}_0^- \quad \mathbf{C}^{\text{hom}} \geq \mathbf{C}^{\text{HS}-} \quad \mathbf{P}_0^- = \mathbf{P}(\mathbf{C}_0^-, \boldsymbol{\delta}) \quad \delta \mathbf{C}_\alpha^- = \mathbf{C}_\alpha - \mathbf{C}_0^-$$

$$\mathbf{C}^{\text{HS}-} = \left[\sum_\alpha f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_0^- : \delta \mathbf{C}_\alpha^-)^{-1} \right] : \left[\sum_\beta f_\beta (\mathbf{I} + \mathbf{P}_0^- : \delta \mathbf{C}_\beta^-)^{-1} \right]^{-1}$$

Remarque : estimations basées sur la solution d'Eshelby

$$\mathbf{C}^{\text{est}} = \left[\sum_\alpha f_\alpha \mathbf{C}_\alpha : (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\alpha : \delta \mathbf{C}_\alpha)^{-1} \right] : \left[\sum_\beta f_\beta (\mathbf{I} + \mathbf{P}_\beta : \delta \mathbf{C}_\beta)^{-1} \right]^{-1}$$

Bornes de PCW

Extension anisotrope pour des composites à inclusions

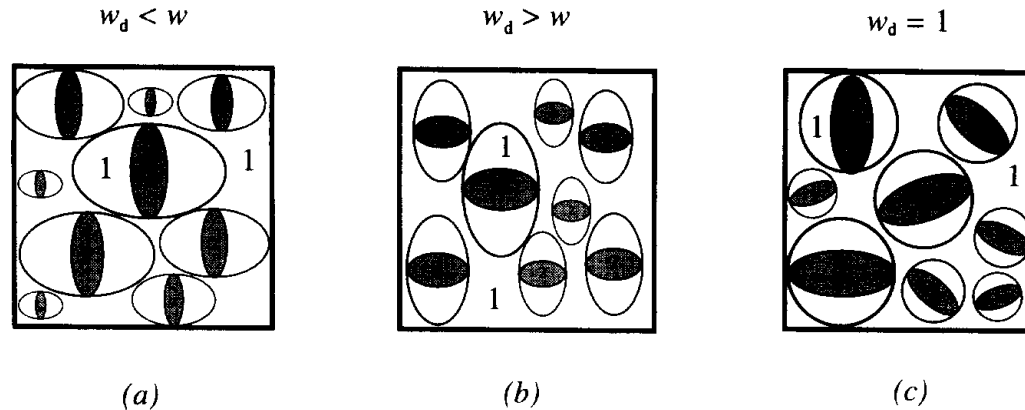


Fig. 2. Three different types of distributions containing spheroidal particles with aspect ratio w . (a) Aligned particles distributed with spheroidal symmetry with aspect ratio $w_d < w$. (b) Aligned particles distributed with spheroidal symmetry with aspect ratio $w_d > w$. (c) Randomly oriented particles with aspect ratio w distributed with spherical symmetry ($w_d = 1$).

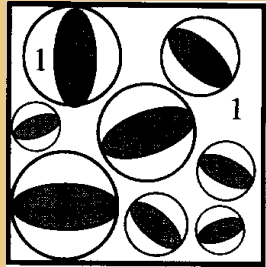
Notion de « distribution ellipsoïdale » difficile à interpréter

Les estimations de PCW se comportent beaucoup mieux que celles de MT !!!

P. Ponte Castañeda et J. R. Willis (1995). J Mech Phys Sol, 43(12), 1919-1951. DOI:10.1016/0022-5096(95)00058-Q

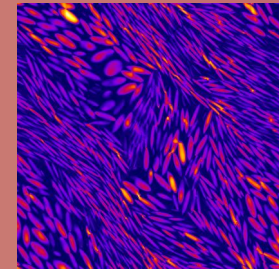
Conclusion

Complexité des calculs multi-échelles



Calculs en « champs moyens »

?



Calculs en « champs complets »
(L. Gélébart)

Merci pour votre attention !

<https://cv.hal.science/sbrisard>
<https://sbrisard.github.io/>
sebastien.brisard@univ-amu.fr

Homogénéisation analytique : schémas linéaires classiques et morphologies associées

© 2025 by Sébastien Brisard is licensed under CC BY 4.0.

To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>