

Approche incrémentale variationnelle appliquée aux composites à matrice fragile endommageable

Ghita Ben-El-Barguia^(a), Sophie Dartois^(a), Noel Lahellec^(b), Djimedo Kondo^(a)

(a) Institut Jean Le Rond d'Alembert

(b) Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA)

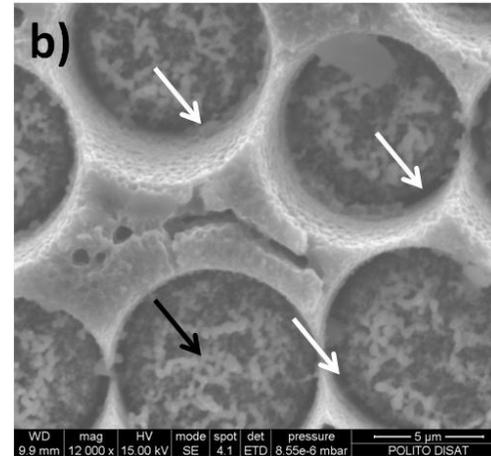
Colloque National d'Aussois – Janvier 2025

Mécamat

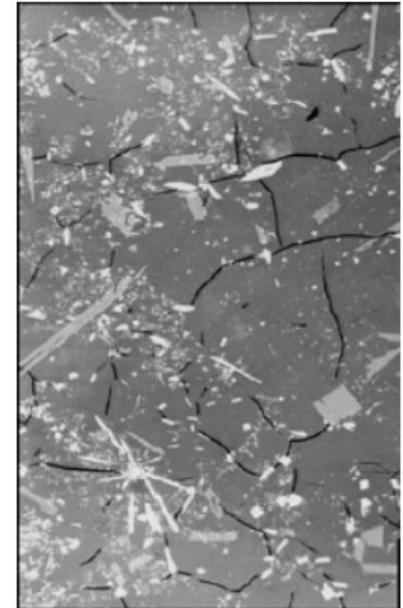
Composites endommageables :

- Réseau de **microfissures** ou **micropores évolutif**
- Hétérogénéité intraphase.
Principalement dans la matrice.
- **Couplage fort** entre processus conservatif (élasticité) et dissipatif (endommagement)
- Comportements macroscopiques variés avec :
 - **Dégradation** des propriétés élastiques
 - Phase **adoucissante** avant fissuration...
 - ...ou Phase **durcissante**

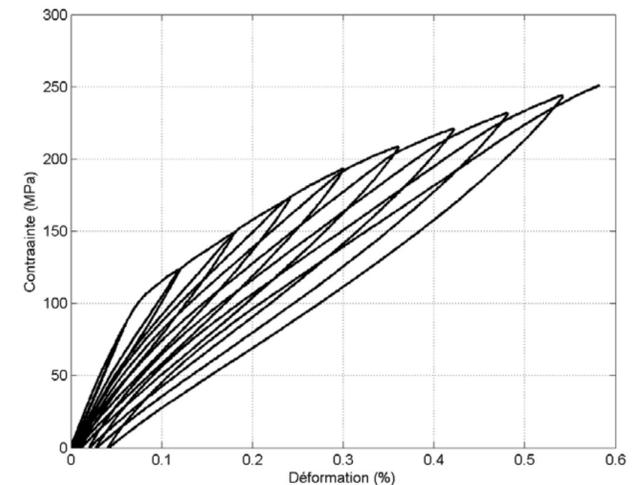
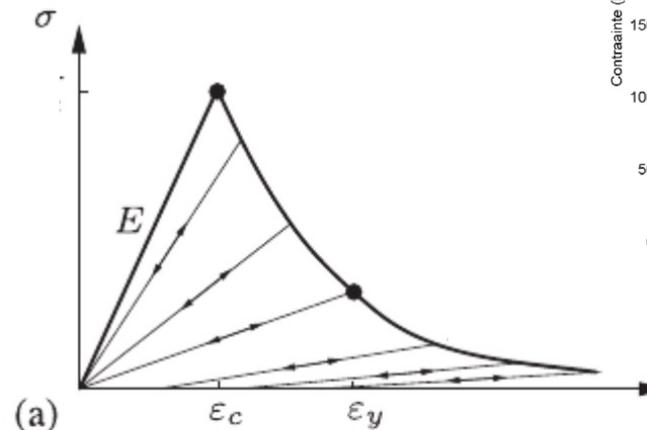
→ Besoin de méthodes d'homogénéisation **non linéaires adaptées**



Valenza et al. (2017)
CMC SiCf/SiC



Weber et al. (1998)
Céramiques cristallines



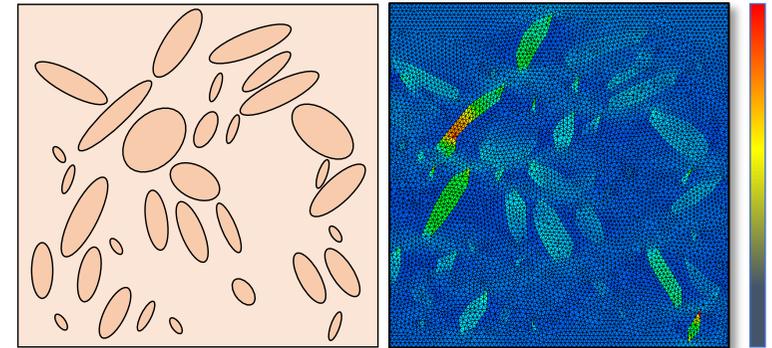
Thèse El Yagoubi (2011)
Composite tissé stratifié 2D
HNS/PyC/SiC-CVI

Homogénéisation non linéaire

➤ Homogénéisation numérique (FEM, FFT,...) :

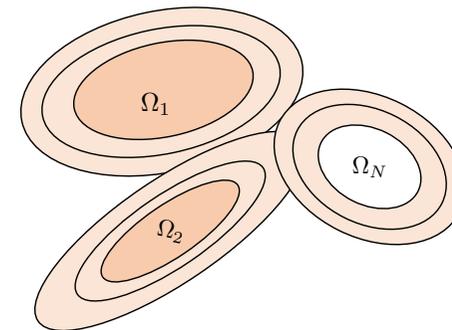
[Moulinec & Suquet 1998, Yvonnet 2019, Gélébart, Chen et al 2021]

- Reste couteux en temps de calcul
- À l'échelle de la structure (FE²) [Feyel 1999]
- Microstructure **évolutive**



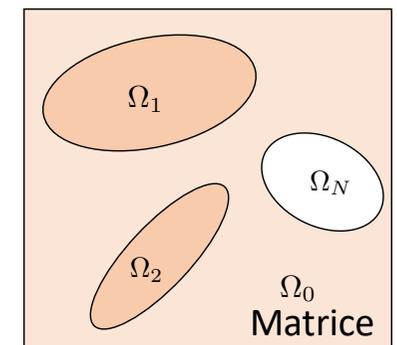
➤ Méthodes semi analytiques :

- TFA [Dvorak, 1992],
- NTFA [Michel et Suquet, 2003]



➤ Méthodes d'homogénéisation en champs moyens non linéaires :

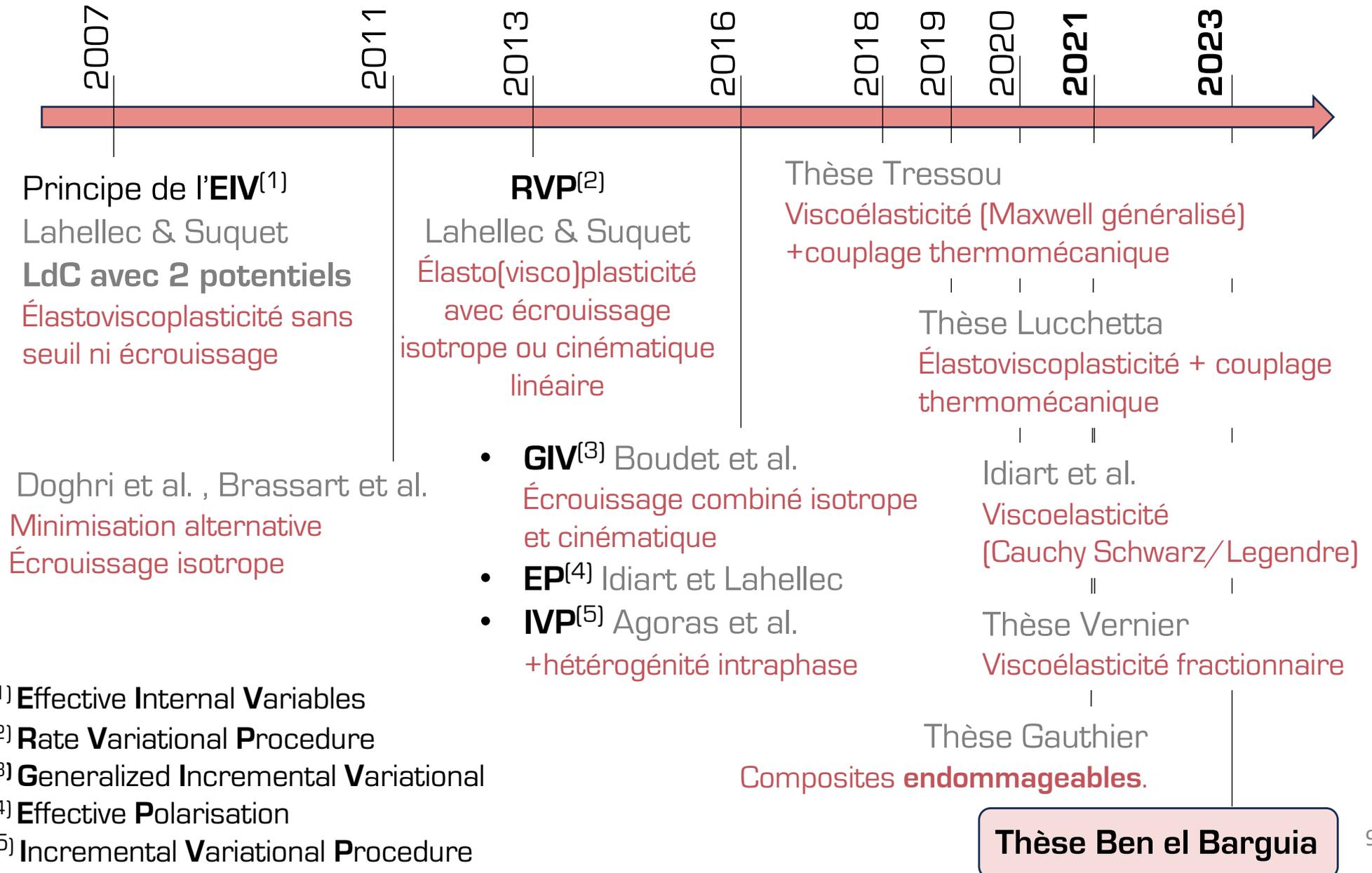
- Méthode tangente (Hill 1965) et suivantes - Linéarisation incrémentale autour du 1^{er} moment.
- Approche variationnelle et méthode sécante modifiée - prise en compte du second moment
[Ponte Castañeda 1991,1992 - Suquet 1995]
- **Méthode incrémentale variationnelle** – Lois de comportement locales décrites à l'aide deux potentiels
[Mialon, 1986; Ortiz and Stainier, 1999, **EIV Lahellec et Suquet 2007**]



Homogénéisation non linéaire

Méthode incrémentale variationnelle : Quelques éléments de bibliographie

Travaux dans la lignée de l'EIV



- I. L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable**
 1. Principe général de la méthode EIV
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement

- II. Simulations en champs complets et validation numérique**
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.

- III. Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.**
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle avec écrouissage

- IV. Conclusion et perspectives.**

- I. L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable**
 1. Principe général de la méthode EIV
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement
- II. Simulations en champs complets et validation numérique**
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.
- III. Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.**
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle avec écrouissage
- IV. Conclusion et perspectives.**

Cadre des **Matériaux Standards Généralisé** (MSG), gouverné par **deux potentiels** :

Halphen and Nguyen [1975], Germain et al. [1983], Nguyen [2000], Maitournam [2012]

• **Énergie libre** : $w(\varepsilon, \alpha)$

→ **Lois d'état** associées :

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha) \quad \gamma = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha)$$

• **Potentiel de dissipation** : $\varphi(\dot{\alpha})$

→ **Équation d'évolution** :

$$\gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha})$$

Lois de comportement NL des constituants

= Système de 2 équations différentielles :

• *Contrainte locale* :

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha)$$



Formes **discrétisées**
(Schéma d'Euler implicite)

• *Eq. d'évolution de Biot (1965)* :

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha}) = 0$$



$$\sigma_{n+1} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{n+1}}(\varepsilon_{n+1}, \alpha_{n+1})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha_{n+1}}(\varepsilon_{n+1}, \alpha_{n+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_{n+1}}\left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}\right) = 0$$

➤ Rappel, Forme **discrétisée** des lois de comportement :

$$\sigma_{n+1} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{n+1}}(\varepsilon_{n+1}, \alpha_{n+1}) \quad \left| \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha_{n+1}}(\varepsilon_{n+1}, \alpha_{n+1}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_{n+1}} \left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t} \right) = 0$$

➤ **Formulation variationnelle**

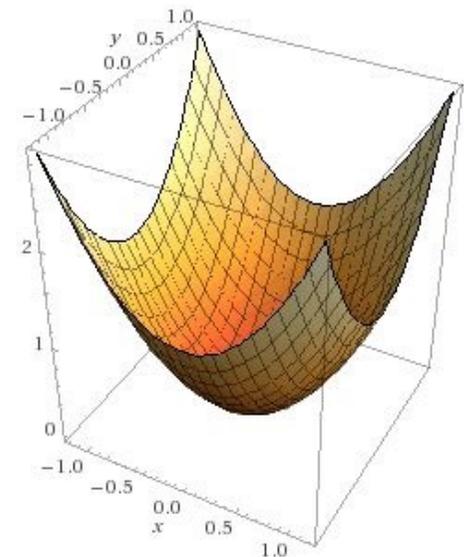
(Mialon, 1986; Ortiz and Stainier, 1999)

1. Définition d'un **potentiel incrémental** :

$$J(\varepsilon, \alpha) = w(\varepsilon, \alpha) + \Delta t \varphi \left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t} \right)$$

potentiel incrémental
condensé

$$w_{\Delta}(\varepsilon) = \inf_{\alpha} J(\varepsilon, \alpha)$$



2. La contrainte est exprimée à l'aide d'un **seul potentiel** ne dépendant que de ε :

$$\sigma_{n+1} = \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_{n+1})$$

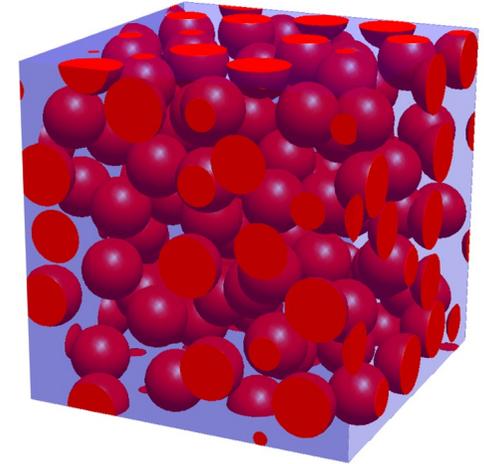
Formalisme **proche de celui**
de l'hyperélasticité.

Problème de calcul de structure (=VER)

- **Problème local** discrétisé sur un composite (équations) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équilibre : } \operatorname{div}(\sigma_{n+1}) = 0 \\ \text{Comportement : } \sigma_{n+1} = \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_{n+1}) \\ \text{CL : } u_{n+1}(x) = E_{n+1}x \end{array} \quad \forall x \in \Omega \right.$$

$$\forall x \in \partial\Omega$$



- **Formulation variationnelle locale** – potentiel incrémental **condensé** :

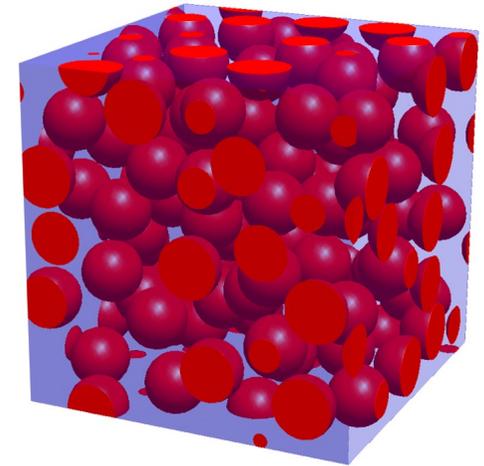
$$w_{\Delta}(x, \varepsilon) = \inf_{\alpha} \underbrace{J(x, \varepsilon, \alpha)}_{\sum_{r=1}^N J^{(r)}(\varepsilon, \alpha) \chi^{(r)}(x)} \longrightarrow \chi^{(r)}(x)$$

Fonction caractéristique de la phase [r]

$$J^{(r)}(\varepsilon, \alpha) = w^{(r)}(\varepsilon, \alpha) + \Delta t \varphi^{(r)} \left(\frac{\alpha - \alpha_n}{\Delta t} \right)$$

potentiel incrémental de la phase [r]

Problème de calcul de structure (=VER)



- **Problème local** discrétisé sur un composite (équations) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Équilibre : } \operatorname{div}(\sigma_{n+1}) = 0 \\ \text{Comportement : } \sigma_{n+1} = \frac{\partial w_{\Delta}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_{n+1}) \\ \text{CL : } u_{n+1}(x) = E_{n+1}x \end{array} \quad \forall x \in \Omega \right.$$

- **Formulation variationnelle locale** – potentiel incrémental **condensé** :

$$w_{\Delta}(x, \varepsilon) = \inf_{\alpha} J(x, \varepsilon, \alpha)$$

- **Formulation variationnelle à l'échelle de la structure** - pot. inc. **condensé effectif** :

$$\tilde{w}_{\Delta}(E) = \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \langle w_{\Delta}(x, \varepsilon) \rangle = \inf_{\varepsilon / \langle \varepsilon \rangle = E} \langle \inf_{\alpha} J(x, \varepsilon, \alpha) \rangle$$

- **Réponse macroscopique** recherchée :

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_{\Delta}(E)}{\partial E}$$

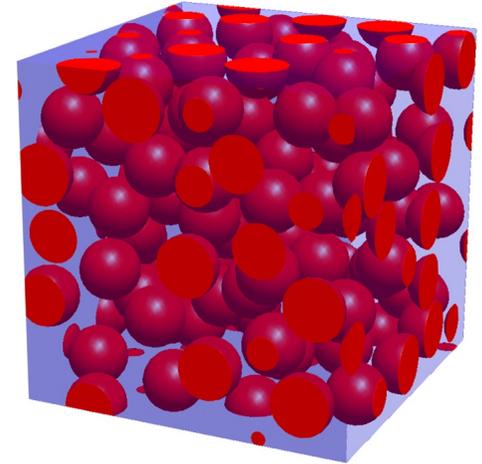
- I. L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable**
 1. Principe général de la méthode EIV
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement

- II. Simulations en champs complets et validation numérique**
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.

- III. Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.**
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle avec écrouissage

- IV. Conclusion et perspectives.**

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha) \quad \text{Cadre des MSG} \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha}) = 0$$



- **Énergie libre** des phases :

$$w(x, \varepsilon, d) = \sum_{r=1}^N \underbrace{w^{(r)}(\varepsilon, d)}_{= \frac{1}{2} \varepsilon : [g(d) \mathbb{C}_s^{(r)}] : \varepsilon} \chi^{(r)}(x)$$

- **Potentiel de dissipation** des phases [Marigo 1981] :

$$\varphi(x, \dot{d}) = \sum_{r=1}^N \underbrace{\varphi^{(r)}(\dot{d})}_{= \mathcal{Y}_c \dot{d} + \psi_c(\dot{d})} \chi^{(r)}(x)$$

- **Potentiel incrémental** de la phase (r) endommageable :

$$J^{(r)}(\varepsilon, \alpha) = w^{(r)}(\varepsilon, d) + \Delta t \varphi^{(r)} \left(\frac{d - d_n}{\Delta t} \right)$$

$$J^{(r)}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \varepsilon : [g(d) \mathbb{C}_s^{(r)}] : \varepsilon + \mathcal{Y}_c (d - d_n) + \Delta t \psi_c \left(\frac{d - d_n}{\Delta t} \right)$$

$$J^{(r)}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \varepsilon : g(d) \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon + \mathcal{Y}_c(d - d_n) + \Delta t \psi_c \left(\frac{d - d_n}{\Delta T} \right)$$

Couplage NL entre élasticité et endommagement

➤ **Définition d'un potentiel incrémental linéarisé J_0** :

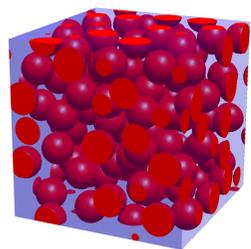
(Ponte-Castañeda 1992, EIV Lahellec & Suquet 2007)

$$J = J_0 + \underbrace{J - J_0}_{\Delta J \text{ Estimable}}$$

$$J_0(x, \varepsilon, d) = \sum_{r=1}^N J_0^{(r)}(\varepsilon, d) \chi^{(r)}(x)$$

Utilisable dans les méthodes classiques d'homogénéisation

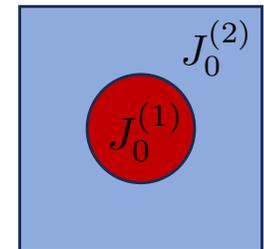
semi-analytiquement



Comportement local NL

Linéarisation

MLC



Milieu Homogène Équivalent

Schéma classique d'homogénéisation lin.

$$J^{(r)}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \varepsilon : g(d) \mathbb{C}_s^{(r)} : \varepsilon + \mathcal{Y}_c(d - d_n) + \Delta t \psi_c \left(\frac{d - d_n}{\Delta T} \right)$$

Couplage NL entre élasticité et endommagement

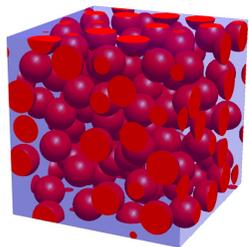
➤ **Définition d'un potentiel incrémental linéarisé J_0** : $J = J_0 + \Delta J$

[Ponte-Castañeda 1992, EIV Lahellec & Suquet 2007]

$$J_0^{(r)}(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} g(d) \mathcal{A}_0^{(r)} + \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}_0^{(r)} : \varepsilon + \mathcal{Y}_c(d - d_n) + \Delta t \psi_c \left(\frac{d - d_n}{\Delta t} \right)$$

Scalaire. Uniforme par phase

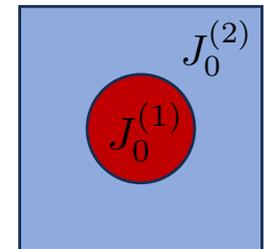
Tenseur d'ordre 4 avec les sym. de l'élasticité. Uniforme par phase



Comportement local NL

Linéarisation
+
Uniformisation

MLC à propriétés homogènes intra φ



Milieu Homogène Équivalent

Schéma classique d'homogénéisation lin.

- Approximation du potentiel incrémental condensé **effectif** :

[Ponte Castañeda, 1991]

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\langle \underbrace{\inf_{d/\psi_c(\dot{d})} J(x, \boldsymbol{\varepsilon}, d)}_{w_\Delta(x, \boldsymbol{\varepsilon})} \right\rangle = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left\langle \inf_{d/\psi_c(\dot{d})} [J_0(x, \boldsymbol{\varepsilon}, d) + \Delta J(x, \boldsymbol{\varepsilon}, d)] \right\rangle$$

- Minimisation / $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'affecte pas la minimisation / d :

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left[\inf_{d/\Psi_c(\dot{d})} \langle J_0(x, \boldsymbol{\varepsilon}, d) + \Delta J(x, \boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle \right]$$

- Relaxation / Borne Sup rigoureuse :

[Ponte Castañeda & Willis 1999, Ponte Castañeda 2002]

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \leq \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left[\underbrace{\inf_{d/\Psi_c(\dot{d})} \langle J_0(x, \boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle}_{\text{Permet d'identifier } d} + \sup_{x, \boldsymbol{\varepsilon}^*, d^*} \langle \Delta J(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle \right]$$

- Meilleure approximation :

[Ponte Castañeda & Willis 1999]

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \underset{\mathcal{A}_0^{(r)}, \mathcal{C}_0^{(r)}}{\text{stat}} \left[\inf_{\boldsymbol{\varepsilon}/\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left(\inf_{d/\Psi_c(\dot{d})} \langle J_0(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle + \underset{\boldsymbol{\varepsilon}^*, d^*}{\text{stat}} \langle \Delta J(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle \right) \right]$$

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \underset{\mathcal{A}_0^{(r)}, \mathcal{C}_0^{(r)}}{\text{stat}} \left[\inf_{\boldsymbol{\varepsilon} / \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left(\inf_{d / \Psi_c(d)} \langle J_0(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle + \underset{\boldsymbol{\varepsilon}^*, d^*}{\text{stat}} \langle \Delta J(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle \right) \right]$$

➤ **Minimisation de J_0 :**

Variable d'endommagement
uniforme par phase :

$$d_{opt}^{(r)} = 1 - \frac{\gamma_c}{\mathcal{A}_0^{(r)}}$$

Dépend des seconds moments en déformation
→ **Valeur de d_{opt} tient compte d'une certaine hétérogénéité intraphase**

➤ **Stationnarité de $\Delta J^{(r)}$ et de $\langle J_0^{(r)} + \Delta J^{(r)} \rangle^{(r)}$:**

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{(r)} &= \left\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_s^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle^{(r)} \\ \mathbb{C}_0^{(r)} &= g \left(d_{opt}^{(r)} \right) \mathbb{C}_s^{(r)} \end{aligned}$$

Moyenne sur la phase (r) saine de l'énergie élastique

Système couplé d'équations à résoudre

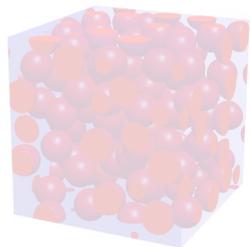
Rq : Solution unique.

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \text{stat}_{\mathcal{A}_0^{(r)}, \mathcal{C}_0^{(r)}} \left[\inf_{\boldsymbol{\varepsilon} / \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}} \left(\inf_{d / \Psi_c(d)} \langle J_0(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle + \text{stat}_{\boldsymbol{\varepsilon}^*, d^*} \langle \Delta J(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \rangle \right) \right]$$

➤ Formulation variationnelle à l'échelle de la structure- pot. inc. condensé effectif :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) \\ &= \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{C}_0^{(r)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(x) \rangle = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{C}_0^{(r)} : \left[\mathbb{A}^{(r)} : \mathbf{E} \right] \end{aligned}$$

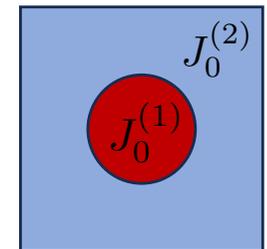
Tenseur de localisation
du MLC (à choisir)



Comportement
local NL

Linéarisation
+
Uniformisation

MLC à
propriétés
homogènes
intra φ



Milieu
Homogène
Équivalent

Schéma classique
d'homogénéisation lin.

- I. L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable
 1. Principe général de la méthode EIV
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement
- II. Simulations en champs complets et validation numérique**
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.
- III. Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle avec écrouissage
- IV. Conclusion et perspectives.

Modèle Analytique

➤ Propriétés matérielles :

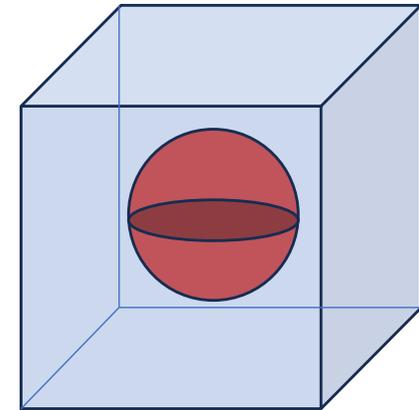
(Fantoni et al. 2020 - Matrice Aluminium renforcée de carbures de Silicium)

[1] Inclusion sphérique élastique linéaire

$$E^{(1)} = 340 \text{ GPa}, \quad \nu^{(1)} = 0,18, \quad c^{(1)} = 25\%$$

[2] Matrice élasto-endommageable

$$E^{(2)} = 60 \text{ GPa}, \quad \nu^{(2)} = 0,3, \quad \mathcal{Y}_c = 4,8 \text{ MPa}$$



➤ Fonction de dégradation : $g(d) = (1 - d)^2$

➤ Système à résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0^{(2)} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_s^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = 0 \\ \mathbb{C}_0^{(2)} - \left(d_{opt}^{(r)} \right) \mathbb{C}_s^{(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Résolution à l'aide d'un algorithme itératif} \\ \text{(moindres carrés + Levenberg-Marquardt)} \\ \text{Résolution en quelques min. sur portable}$$

➤ Propriétés effectives :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{C}_0^{(r)} : \left[\mathbb{A}^{(r)} : \boldsymbol{E} \right] \quad \text{Hashin Shtrikman}$$

➤ Chargement isochore :

$$E(t) = E_{33}(t) = -\frac{1}{2} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + e_3 \otimes e_3$$

Modèle Numérique

➤ Mise en œuvre numérique

- Langage : Python 3
- Plateforme : **FEniCs**
- Optim. de la résolution des éq. de l'endommagement : PETSc
- Post-traitement : Paraview

➤ Géométrie et maillage (GMSH + bibliothèque Meshr)

- Géométrie : 1/8 de cube
- Maille : Tet4 noeuds
- Taille de maille : $h=0,15\text{mm}$
- 7609 noeuds

➤ Propriétés matérielles [Fantoni et al. 2020] :

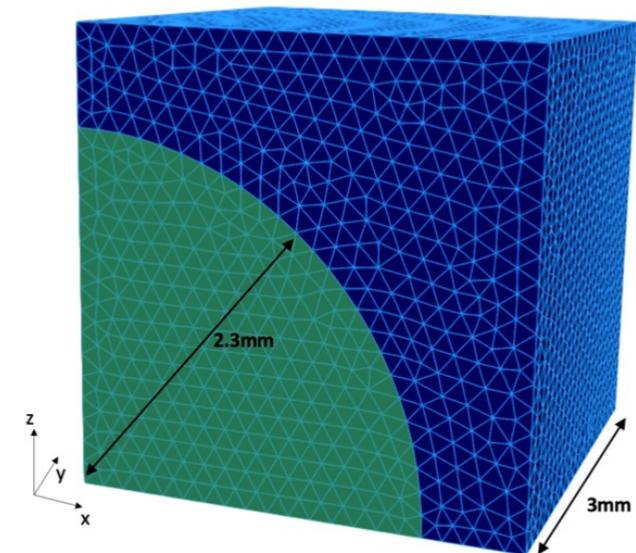
[1] Inclusion sphériques élastiques linéaires

$$E^{(1)} = 340 \text{ GPa}, \quad \nu^{(1)} = 0,18, \quad c^{(1)} = 25\%$$

[2] Matrice élasto-endommageable

$$E^{(2)} = 60 \text{ GPa}, \quad \nu^{(2)} = 0,3, \quad \mathcal{Y}_c = 4,8 \text{ MPa}$$

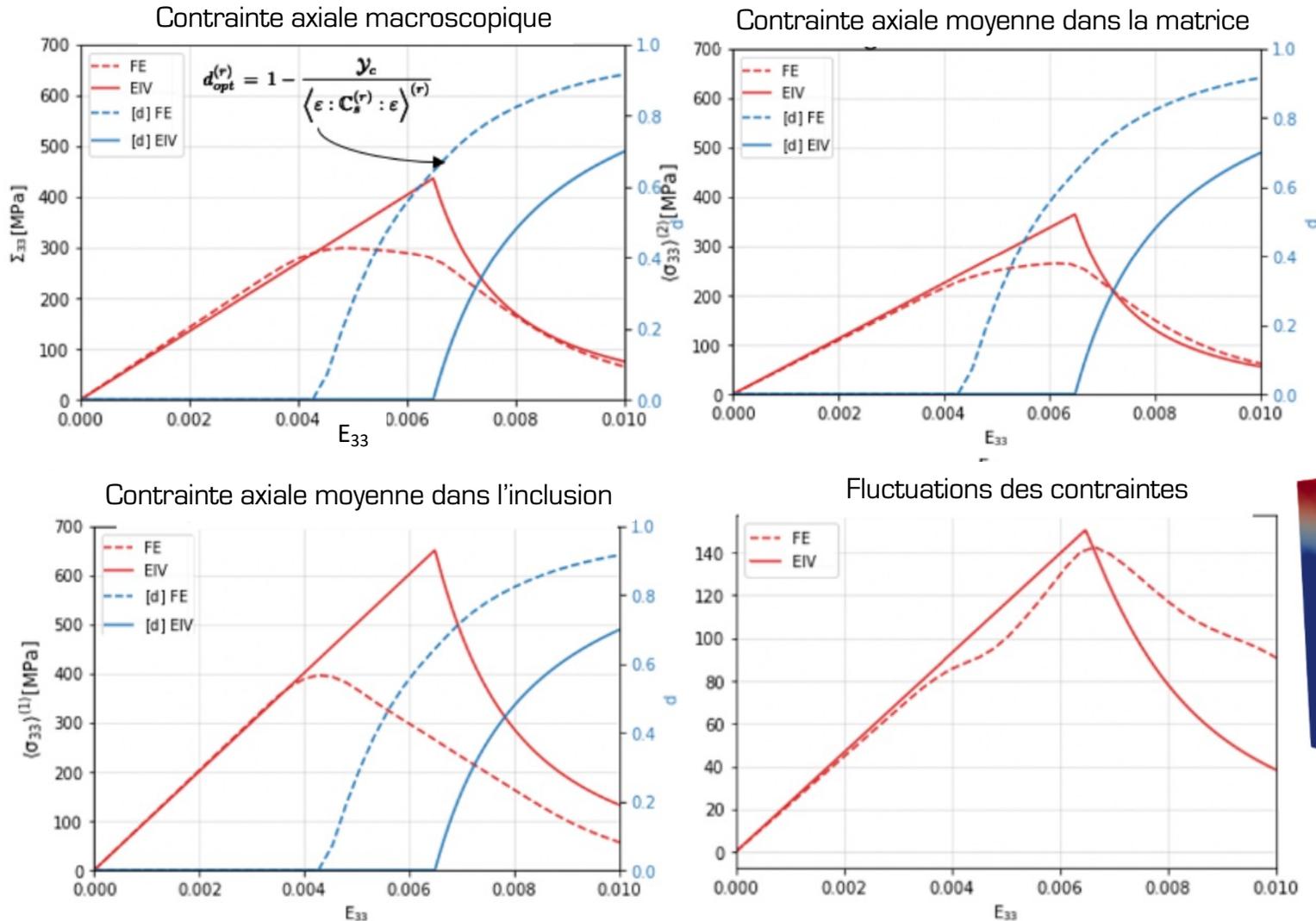
$$G_c = 6 \text{ N/mm} \rightarrow l_0 = \frac{3G_c}{8\mathcal{Y}_c} = 0,77\text{mm} \quad (h < l_0)$$



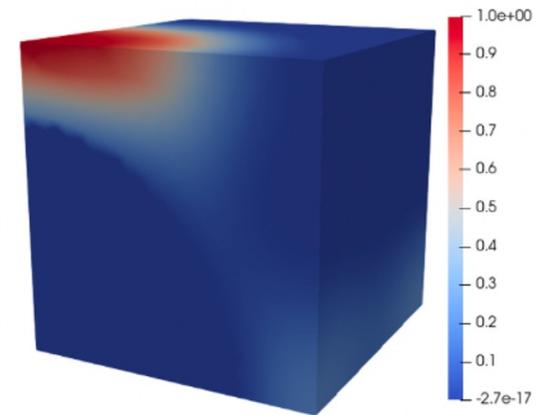
➤ Conditions aux limites [KUBC], CL naturelles en endommagement et chargement isochoire :

$$E(t) = E_{33}(t) = -\frac{1}{2} (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + e_3 \otimes e_3$$

- I. L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable
 1. Principe général de la méthode EIV
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement
- II. Simulations en champs complets et validation numérique**
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.
- III. Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle AT1 avec écrouissage
- IV. Conclusion et perspectives.

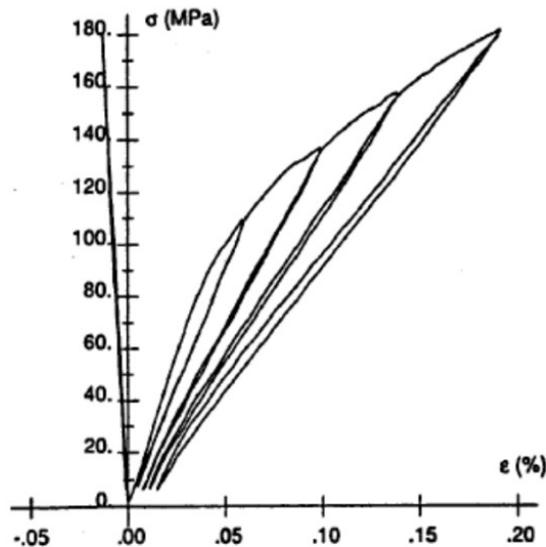


Prédictions du modèle
/ Simulations en champs complet (Stop dès que $d=1$)



- Le modèle prédit un **régime purement élastique** suivi d'un **comportement adoucissant**
- MEF : **phase NL avec écrouissage** avant la phase adoucissante
- Apparition de l'endommagement à des **seuils très différents.**

- I. L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable
 1. Principe général de la méthode
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement
- II. Simulations en champs complets et validation numérique
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.
- III. Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.**
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle avec écrouissage
- IV. Conclusion et perspectives.



(a) 0° tension test

Gasser et al., SiC-SiC composite, 1996

➤ Modification de la loi d'endommagement :
[inspiré de Marigo 1982]

$$w^{(r)}(\varepsilon, d); \quad \varphi^{(r)}(\dot{d}, d) = \mathcal{Y}_c(\gamma + 2\eta d)\dot{d} + \psi_c(d)$$

$[\gamma = 0, \eta = 1]$: modèle **sans seuil d'endommagement**

$[\gamma = 1, \eta = 0]$: modèle régime élastique immédiatement suivi d'une **phase adoucissante**

$[\gamma = 1, \eta \neq 0]$: modèle avec **écrouissage** : régime élastique suivi d'une phase avec écrouissage qui retarde l'apparition de la phase adoucissante

➤ Modification :

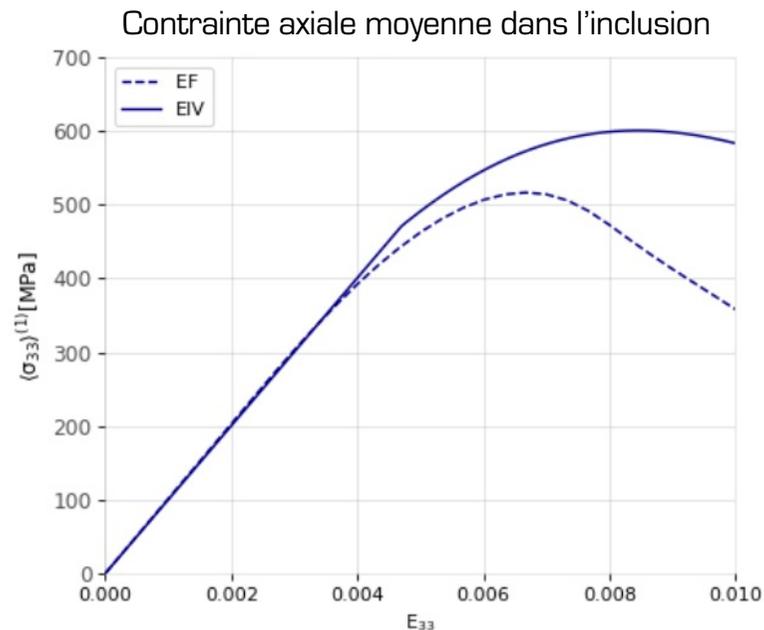
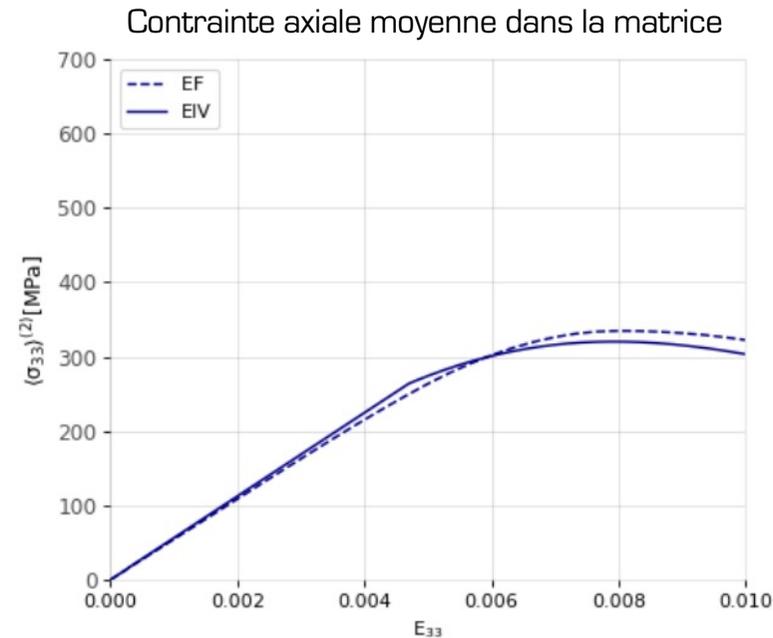
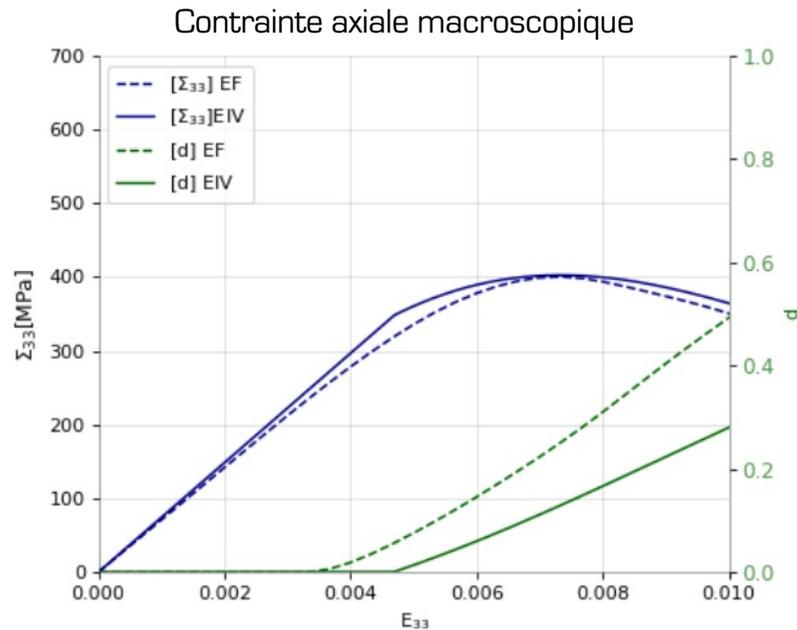
- du potentiel incrémental condensé : $J^{(r)} = w^{(r)}(\varepsilon, d) + \Delta t \varphi^{(r)}\left(\frac{d - d_n}{\Delta t}, d\right)$
- du système à résoudre :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0^{(2)} - \langle \varepsilon : \mathbb{C}_s^{(2)} : \varepsilon \rangle^{(2)} = 0 \\ \mathbb{C}_0^{(2)} - \left(1 - d_{opt}^{(r)}\right)^2 \mathbb{C}_s^{(2)} = 0 \end{cases}$$

Plan

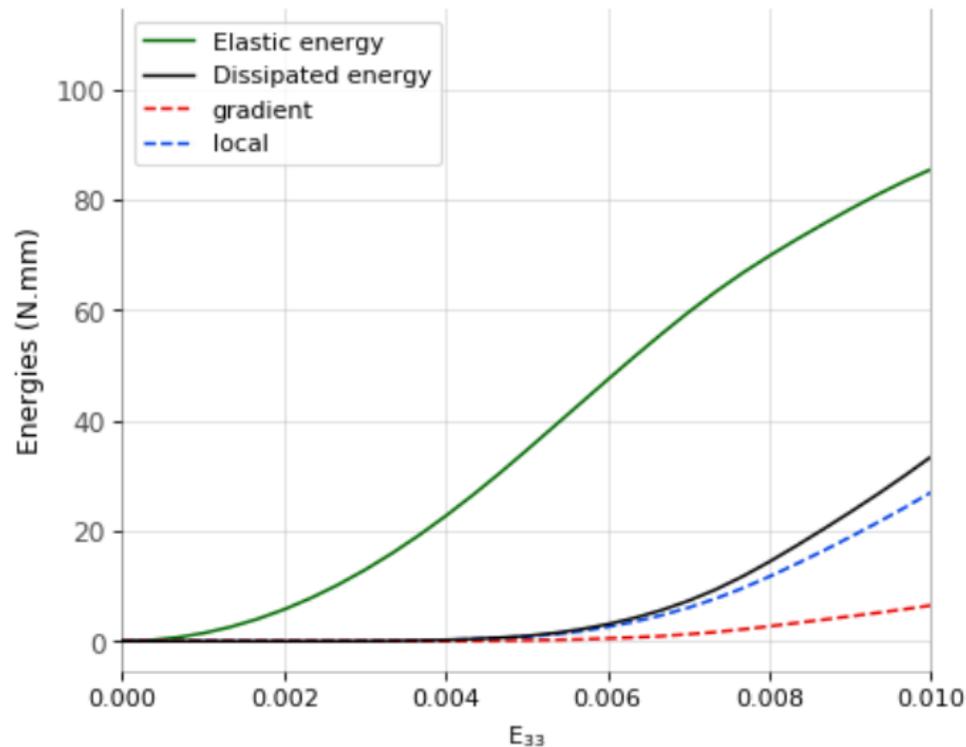
- I. L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable
 1. Principe général de la méthode
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement
- II. Simulations en champs complets et validation numérique
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.
- III. Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.**
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle avec écrouissage
- IV. Conclusion et perspectives.

Modèle avec écrouissage [$\gamma = 1, \eta = 5$]; $l_0 = 0,39mm$



- **Bon accord** entre les prédictions du modèles et les simulations pour la **réponse effective** et les **champs locaux dans la matrice**
- Le **régime adoucissant est retardé** par l'effet de l'écrouissage **dans la matrice**
- Dans l'**inclusion** l'accord est seulement **qualitatif**.

$$\mathcal{E}(u, d) = \underbrace{\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (1-d)^2 \boldsymbol{\varepsilon}(u) : \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\varepsilon}(u) \right) d\Omega}_{\text{énergie élastique}} + \underbrace{\frac{3G_c}{8l_0} \int_{\Omega} (d + l_0^2 \nabla d \cdot \nabla d) d\Omega}_{\text{énergie dissipée}}$$



Contribution du terme avec **gradient d'endommagement** << contribution **locale**

➤ Modèle assez pertinent dans cette configuration

Plan

- I. **L'approche incrémentale variationnelle pour les composites élasto-endommageable**
 1. Principe général de la méthode
 2. Développements pour prise en compte de l'endommagement

- II. **Simulations en champs complets et validation numérique**
 1. Un modèle à gradient d'endommagement comme référence
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas d'un biphase à matrice endommageable.

- III. **Matériaux endommageables présentant une phase durcissante.**
 1. Prise en compte de l'écrouissage
 2. Comparaison modèle/simulations dans le cas du modèle AT1 avec écrouissage

- IV. **Conclusion et perspectives.**

➤ Développement d'un modèle de comportement pour les composites élasto-endommageables :

- **Extension de l'EIV** (Lahellec & Suquet 2007) **aux composites élasto-endommageable** qui s'appuie sur une **linéarisation simple du comportement**
- L'endommagement dans les phases est **uniforme** mais **dépend du second moment du champ de déformations**.
- Contrairement aux modèles élasto-plastique la solution du système non linéaire est **unique**
- La prise en compte de l'adoucissement de la matrice influe fortement sur la réponse effective du composite.

➤ Comparaison à des simulations numériques :

- **Comparaison à des simulations en champs complets régularisées** (approche variationnelle de l'endommagement)
- Simulations permettent de mieux comprendre les phénomènes d'endommagement
- Premiers résultats avec **bon accord qualitatif** – Des améliorations sont possibles

➤ Quelques perspectives :

- **Comparaison à des simulations en champs complets** sur des microstructures
→ Gauthier et al. (2022), et/ou composites à fibres
- Prise en compte des **effets unilatéraux** (développements importants)
- Confrontation à des résultats expérimentaux
- Développement d'outils numériques s'appuyant sur les **modèles d'endommagement locaux** avec méthodes de relaxation d'énergie (Francfort and Marigo, 1993; Gurses and Miehe, 2011)

Je vous remercie !

Colloque National d'Aussois – Janvier 2025

Mécamat