

BIENVENUE AU 30e COLLOQUE MECAMAT Aussois ! 27-31/01 2025

Homogénéisation en Mécanique des Matériaux

**Du bon usage des méthodes d'homogénéisation en
MECANique des MATériaux**

Djimédo KONDO (Institut Jean Le Rond D'Alembert)

Note: Présentation introductive, pour les vrais débutants!

Ceci n'est donc pas une conférence!!

Outline

- ① Introduction - Bref aperçu historique
- ② Milieux élastiques hétérogènes et propriétés effectives
- ③ Extension à la Thermoélasticité/Poroélasticité
- ⑤ Homogénéisation et Analyse limite
- ④ Les 23 problèmes de la semaine d'Aussois !

Le papyrus : un précurseur des matériaux composites



New testament on papyrus.

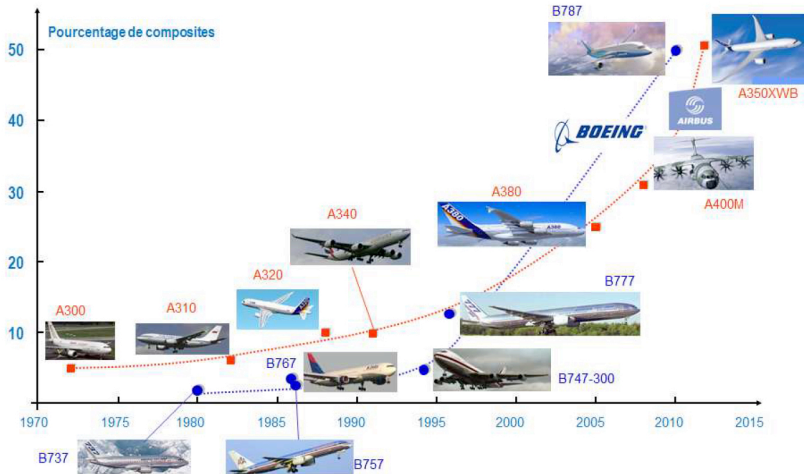
Nouveau testament sur papier Papyrus



Artwork on papyrus.

œuvre d'art sur papyrus

Les composites en Aéronautique : que de progrès !



(Extrait de la thèse de C. Fendzi, Ensam, 2015)

Après la controverse des élasticiens (Cauchy et Navier, versus Green), la bataille autour du microscopique

- La transition entre 2 mondes : Boltzmann et Maxwell versus Ostwald et Mach



Boltzmann 1844-1906,
Théorie cinétique gaz

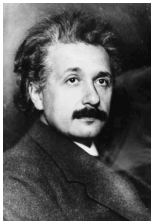


E. Mach, 1831-1916,
phénoménologie



Ostwald 1853-1932,
converti par la suite

- La thèse d'A. Einstein et la problématique des suspensions de particules



- ▶ Les suspensions de particules visqueuses
- ▶ La prédiction $\mu = \mu_0(1 + \frac{5}{2}c)$
- ▶ retombée pour l'atomisme (de Jean Perrin)

Prédécesseurs et Followers d'Einstein !

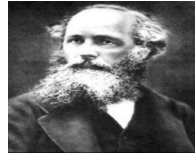
Les suspensions diluées n'étaient pas nouvelles en physique : conductivités, etc. (cf. p. ex. K.Z. Markov, 2000 *Elementary Micromechanics of Heterogeneous Media*).



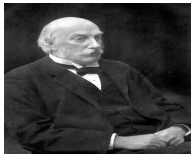
Clausius 1822-1888,
constante
diélectrique



Mossotti
1791-1863,
conductivité
électrique



Maxwell 1831-1879,
conductivité et
viscosité



Rayleigh 1842-1919
milieux périodiques



Jeffery 1891-1957
viscosité effective



Batchelor
1920-2000

La table des Lois (Hashin, J. App. Mech., 1983)

Physical Subject	φ	$\mathbf{H} = -\nabla\varphi$	μ	$\mathbf{q}$
Thermal Conduction	Temperature	Gradient	Thermal Conductivity	Heat Flux
Electrical Conduction	Potential	Intensity	Electrical Conductivity	Current Density
Electrostatics	Potential	Intensity	Permittivity	Electric Induction
Magnetostatics	Potential	Intensity	Magnetic Permeability	Magnetic Induction
Diffusion	Concentration	Gradient	Diffusivity	

Table 1

Elasticity	Conduction
$u_i = \text{displacement}$	$\varphi = \text{temperature}$
$\varepsilon_{ij} = \text{strain}$	$-\varphi_{,i} = \text{gradient}$
$\sigma_{ij} = \text{stress}$	$q_i = \text{flux}$
$T_i = \text{traction}$	$q_n = \text{normal flux component}$
$C_{ijkl} = \text{elastic moduli}$	$\mu_{ij} = \text{conductivities}$
$S_{ijkl} = \text{compliances}$	$\rho_{ij} = \text{resistivities}$

Table 2

L'élasticité, c'est le Graal de l'Homogénéisation Linéaire !

La branche Solide de l'homogénéisation linéaire

- 1889 : Moyenne arithmétique (Voigt)
- 1929 : Moyenne géométrique (Reuss)
- 1957 : Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. Proc. of the royal soc. London. Series A. Mathematical and physical sci., 241(1226), 376-396.
- 1962 : A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1963.
- 1977 : Généralisation (Willis)
- 1978-1980, **Homogénéisation périodique** : Bensoussan, Lions et Papanicolaou ; puis Sanchez-Palencia et d'autres !
- 1995 : Bornes de Ponte-Castaneda et Willis
- 1996 : Motifs morphologiques, M. Bornert, C. Stolz, A Zaoui
- 1998 : Approche par FFT, Moulinec et Suquet,
- 1998 : La Londe Les Maures...
- 2003 : Briançon 1... et Briançon 2 (2010).

Quelques références en lien avec l'Homogénéisation linéaire

- Bornert, M., Bretheau, T. and Gilormini, P. (2001) Homogénéisation en Mécanique des Matériaux. Tome 1, (2001)
- Dormieux, L., Kondo, D. and Ulm, F.-J. (2006). John Wiley and Sons
- Hashin, Z. (1983). Analysis of Composite. Journal of Applied Mechanics. vol, 50, 483-505.
- Kreher, W. (1990). Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. J. Mech. Phys. Solids, 38, 115-128, 1990.
- Laws, N. (1973). On the thermostatics of composite materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 21(1), 9-17.
- Ponte-Castañeda, P. and Willis, J.-R. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 43 (12), 1919-1951
- Suquet, P. (Ed.). (2014). Continuum micromechanics (Vol. 377). Springer.
- Willis, J. R. (2002) Mechanics of composites.
<https://imechanica.org/files/WillisComposites2002.pdf>
- Zaoui, A. (2002). Continuum micromechanics : survey. Journal of Engineering Mechanics, , 128(8), 808-816.

Homogénéisation

- **L'homogénéisation**, ou changement d'échelles ou passage micro-macro, désigne la procédure qui consiste à déterminer la modélisation homogène d'un milieu finement hétérogène.
- **Séparation d'échelle** : une échelle fine où l'on voit le détail des hétérogénéités, et une échelle plus grossière où tous ces détails ne sont plus discernables.

Des objectifs ambitieux, au service de l'Ingénierie

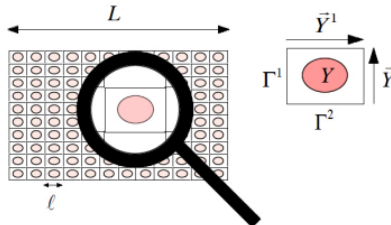
- Prise en compte des informations microstructurales les plus pertinentes, y compris les éventuelles évolutions
- Mise en place d'une méthodologie rigoureuse pour le changement d'échelle (passage micro-macro !). Nécessité de définir des grandeurs moyennées.
- Prédiction des propriétés et comportements effectifs, en lien avec l'agencement microstructural et les propriétés des constituants
- Le Comportement effectif recherché est celui d'un Milieu Homogène Equivalent (le fameux MHE)

La microstructure peut être périodique (possibilité de choisir une cellule de calcul) ou aléatoire (alors on cherchera à mettre en place des outils de description adéquats pour garantir l'homogénéité statistique.

Ce cours étant consacré à des approches dédiées aux milieux aléatoires, on dira seulement quelques mots sur l'homogénéisation asymptotique

Un mot sur l'Homogénéisation de milieux périodiques

- A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, Amsterdam, North Holland, 1978.
- E. Sanchez-Palencia, Non Homogeneous Media and Vibration Theory, Lectures Notes in Physics n° 127, Berlin, Springer Verlag, 1980.
- J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation, Masson, Paris, 1992
- Denis Caillerie, Jean Cousteix, Jacques Mauss (2016). Méthodes asymptotiques en mécanique. Cépaduès



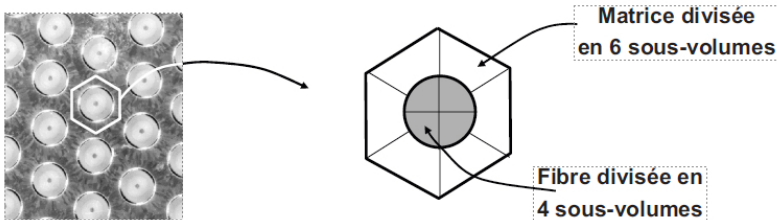
Le milieu périodique et la cellule de référence Y

L'approche asymptotique

- On écrit localement un développement asymptotique sous la forme :

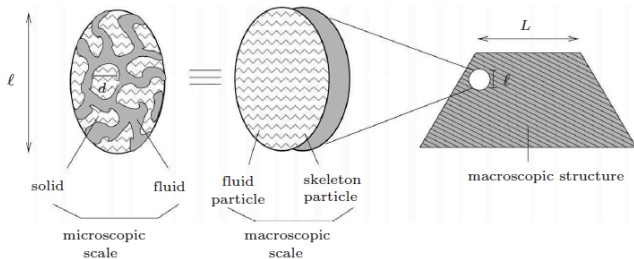
$$u^\varepsilon(x) = u^{(0)}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^{(1)}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u^{(2)}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots$$

où les fonctions $u^{(n)}(x, y)$ sont y -périodiques de période Y .



- Intérêt d'obtenir une classification des problèmes en lien avec la physique
- Possibilité de développements à des ordre élevés (effets non locaux !), etc..

La question du VER



Elementary volume of porous medium in a macroscopic structure. Microscopic and macroscopic scales.

- LE VER est défini comme un domaine avec une microstructure uniforme, considéré représentatif du milieu
- A l'échelle macro, le comportement du VER est celui Milieu Homogène Equivalent recherché.

Description des milieux hétérogènes - Moyennes

- $\chi^{(r)}$, fonction caractéristique de la phase :

$$\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in V^{(r)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Densité d'énergie du matériau hétérogène à N -phases :

$$\psi(\mathbf{x}, \epsilon) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \psi^{(r)}(\epsilon),$$

avec $\psi^{(r)}$ la densité d'énergie de la phase homogène r

- Notations :

$$\langle f \rangle := \frac{1}{\text{Vol}(V)} \int_V f(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}}$$

$$\langle f \rangle^{(r)} := \frac{1}{\text{Vol}(V^{(r)})} \int_{V^{(r)}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Condition de déplacement affine au bord

- On applique un déplacement affine au bord du VER.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \text{ on } \partial V$$

- On montre que sous cette condition, la déformation moyenne sur le VER est donnée par :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle := \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- On définit alors la contrainte moyenne par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle := \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et le comportement effectif est fourni par la relation entre $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$

Condition de contrainte uniforme au bord

- Application d'une traction uniforme à la RVE

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ on } \partial V$$

- On montre alors que la contrainte moyenne sur la RVE est donnée par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle := \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

- On définit la déformation moyenne :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle := \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

La réponse macroscopique (comportement effectif) est donnée par la relation entre $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$

Lemme de Hill

- On considère σ , un champ de contraintes à divergence nulle et $\varepsilon(\mathbf{u})$ un champ de déformations compatible (associé à un champ de déplacements) $\mathbf{u}$
- Considérant un déplacement affine au bord, ou une contrainte uniforme au bord
- Il vient alors :

$$\langle \sigma : \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle \equiv \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}$$

La démo s'appuie sur les conditions indiquées, avec juste un recours au théorème de la divergence.

- On notera que les champs de contraintes et de déformations ne sont pas nécessairement liés par la loi de comportement.

Problème local

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(x) = 0 & \forall x \in \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}(x) & \forall x \in \Omega \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(x) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} & + \text{conditions aux limites } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Densité d'énergie de déformation effective

$$\psi^{hom}(\bar{\varepsilon}) := \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\bar{\varepsilon})} \langle \psi(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{v})) \rangle$$

où $\varepsilon(\mathbf{u})$ est le champ de déformation associé au champ de test $\mathbf{v}$ et

$$\mathcal{K}(\bar{\varepsilon}) = \{ \mathbf{v}, \mathbf{v} = \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{x} \text{ on } \partial V \}$$

Ensuite, on peut montrer (**en s'appuyant sur le Lemme de Hill**) que le comportement effectif du composite est décrit par :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \psi^{hom}}{\partial \bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon})$$

Bornes d'ordre 1 sur l'énergie effective

- La considération du champ test $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans l'expression de ψ^{hom} conduit à :

$$\psi^{hom}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \leq \langle \psi \rangle(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \psi^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Avec un champ test de contrainte uniforme $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ dans ψ^{*hom} , on a :

$$\psi^{*hom}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \leq \langle \psi^* \rangle(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \psi^{*(r)}(\boldsymbol{\sigma})$$

- Les bornes Sup (Voigt, 1889) et Inf (Reuss, 1929) correspondantes sont dites d'ordre 1 (Hill, 1951) :

$$\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbb{C}}^R : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbb{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\mathbb{C}}^V : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\tilde{\mathbb{C}}^R = \langle \mathbb{C}^{-1} \rangle^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{C}}^V = \langle \mathbb{C} \rangle$$

- Ces bornes d'ordre 1 ne font intervenir que les fractions volumiques $c^{(r)}$!

Loi de comportement élastique homogénéisé

- Comportement des phases du matériau linéaire élastique hétérogène :

$$\psi^{(r)}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C}^{(r)} : \varepsilon$$

-

$$\psi^{hom}(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} : \mathbb{C}^{hom} : \bar{\varepsilon}$$

- Par voie de conséquence,

$$\bar{\sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \bar{\varepsilon}$$

- Il reste à déterminer $\mathbb{C}^{hom}$

Moyennes de phase et tenseurs de concentration

- En raison de la linéarité des champs locaux avec les conditions aux bords appliquées, on a :

$$\bar{\epsilon}^{(r)} = \mathbb{A}^{(r)} : \bar{\epsilon}$$

Où $\mathbb{A}^{(r)}$ est le tenseur de concentration de déformation. (Il ne possède pas de symétrie majeure.)

- Remarque : Ce tenseur de concentration satisfait les conditions suivantes :

$$\sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{A}^{(r)} = \mathbb{I},$$

- De plus, on déduit immédiatement des relations de localisation que :

$$\mathbb{C}^{hom} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{C}^{(r)} : \mathbb{A}^{(r)}$$

- $\mathbb{A}$ c'est l'affaire du cours de S. Brisard en s'appuyant sur la résolution du problème d'Eshelby et allant bien au delà des bornes d'ordre 1 !

Seconds moments de la déformation (et de la contrainte)

-

$$\psi^{hom}(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} : \mathbb{C}^{hom} : \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N c^{(r)} C_{ijkl}^{(r)} \langle \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \rangle^{(r)}$$

Où ϵ est le champ de déformation local « réel ».

- on peut montrer que :

$$\langle \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \rangle^{(r)} = \frac{1}{c^{(r)}} \bar{\epsilon} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial C_{ijkl}^{(r)}} : \bar{\epsilon}$$

- Bobeth et Diner (1987), Kreher (1990), Parton et Buryachenko (1990), Kreher et Molinari, 1994). Dans un contexte de comportements isotropes :

$$c^{(r)} \bar{\epsilon}_d^2 = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \mu_r} : \bar{\epsilon} \quad \text{et} \quad c^{(r)} \bar{\epsilon}_v^2 = \bar{\epsilon} : \frac{\partial \mathbb{C}^{hom}}{\partial \kappa_r} : \bar{\epsilon}$$

Composites isotropes : estimations diluées

- composites à renforts rigides en faible concentration : $\kappa^{(1)}$ et $\mu^{(1)} \rightarrow \infty$

$$\kappa^{hom} = \kappa^{(0)} + c \left(\kappa^{(0)} + \frac{4\mu^{(0)}}{3} \right)$$

$$\mu^{hom} = \mu^{(0)} + c \frac{5\mu^{(0)}(3\kappa^{(0)} + 4\mu^{(0)})}{6(\kappa^{(0)} + 2\mu^{(0)})}$$

où c est la fraction volumique des particules.

- Si de plus, la phase matrice est incompressible : $\kappa^{(0)} \rightarrow \infty$

$$\mu^{hom} = \left(1 + \frac{5c}{2} \right) \mu^{(0)}$$

(Résultat d'Einstein)

- Estimation de Batchelor (1971) :

$$\mu^{hom} = \left(1 + \frac{5c}{2} + 7.6c^2 \right) \mu^{(0)}$$

Quand la Thermo(élasticité) rencontre la Microméca !

Bref rappel sur la thermoélasticité linéarisée

Energie libre :

$$\psi(\varepsilon, T) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon - \beta : \varepsilon (T - T_0) - \frac{c_\varepsilon}{2T_0} (T - T_0)^2$$

Lois d'état :

$$\begin{cases} \sigma &= \sigma = \mathbb{C} : \varepsilon - (T - T_0) \beta \\ s &= \beta : \varepsilon + \frac{c_\varepsilon}{T_0} (T - T_0) \end{cases}$$

+ la loi de Fourier : $\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla T$

Équation de la chaleur : $C_\varepsilon \dot{T} = -T \beta : \dot{\varepsilon} + r + k \Delta T$

Le cas découplé :

$$C_\varepsilon \dot{T} = k \Delta T$$

Cas stationnaire : le comportement effectif du matériau thermoélastique

linéaire hétérogène est obtenu en découplant avec la thermique.

Le comportement effectif des matériaux thermoélastiques

- Pour un **matériau thermoélastique linéaire homogène** :

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \sum_{r=1}^N \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \psi^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta)$$

dans laquelle, et en adoptant **la notation** $\theta = T - T_0$

$$\psi^r(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} - \theta \boldsymbol{\beta}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{c_{\varepsilon}^{(r)}}{T_0} \theta^2$$

- En raison de la linéarité de la déformation locale par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}$ et à l'élévation de température θ (**supposée uniforme**), il vient :

$$\psi^{hom}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \theta) = \min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{K}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} \langle \psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \theta) \rangle = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbb{C}^{hom} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \theta \boldsymbol{\beta}^{hom} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \frac{c_{\varepsilon}^{hom}}{T_0} \theta^2$$

- D'où :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \psi^{hom}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbb{C}^{hom} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \theta \boldsymbol{\beta}^{hom}, \quad \bar{\eta} = -\frac{\partial \psi^{hom}}{\partial \theta} = \boldsymbol{\beta}^{hom} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{c_{\varepsilon}^{hom}}{T_0} \theta$$

Moyennes de phase et tenseurs de concentration

- Le champ de déformation local étant linéaire par rapport à la déformation macroscopique et à la température, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\bar{\theta}$, et donc la moyenne de phase correspondante peut s'écrire :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(r)} = \mathbb{A}^{(r)} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \theta \mathbf{a}^{(r)}$$

Où $\mathbb{A}^{(r)}$ et $\mathbf{a}^{(r)}$ sont les tenseurs de concentration de déformation.

- Remarque : Ils satisfont les conditions suivantes. :

$$\sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbb{A}^{(r)} = \mathbb{I}, \quad \text{and} \quad \sum_{r=1}^N c^{(r)} \mathbf{a}^{(r)} = \mathbf{0}$$

Tenseurs de localisation - Propriétés effectives

- Relations constitutives des phases :

$$\bar{\sigma}^{(r)} = \mathbb{C}^{(r)} : \bar{\epsilon}^{(r)} - \theta \beta^{(r)} \quad \text{and} \quad \bar{\eta}^{(r)} = \beta^{(r)} : \bar{\epsilon}^{(r)} + \frac{c_{\epsilon}^{(r)}}{T_0} \theta$$

- De plus, à partir des conditions de moyenne :

$$\bar{\sigma} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} [\mathbb{C}^{(r)} : (\mathbb{A}^{(r)} : \bar{\epsilon} + \theta \mathbf{a}^{(r)}) - \theta \beta^{(r)}]$$

$$\bar{\eta} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} [\beta^{(r)} : (\mathbb{A}^{(r)} : \bar{\epsilon} + \theta \mathbf{a}^{(r)}) + \frac{c_{\epsilon}^{(r)}}{T_0} \theta]$$

- A partir des relations constitutives macroscopiques, on obtient β^{hom} et c_{ϵ}^{hom} :

$$\beta^{hom} = \sum_{r=1}^N c^{(r)} (\beta^{(r)} - \mathbb{C}^{(r)} \mathbf{a}^{(r)}) \equiv \sum_{r=1}^N c^{(r)} : (\mathbb{A}^{(r)})^T \beta^{(r)}$$

Cas du milieu biphasé

- Relations de moyennes pour un milieu biphasé :

$$c^{(1)}\mathbb{A}^{(1)} + c^{(2)}\mathbb{A}^{(2)} = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad c^{(1)}\mathbf{a}^{(1)} + c^{(2)}\mathbf{a}^{(2)} = 0$$

- En reportant dans l'expression précédente de β^{hom} (pour $N = 2$), on établit :

$$\mathbf{a}^{(1)} = -(\Delta\mathbb{C})^{-1} : (\mathbb{A}^{(1)} - \mathbb{I})^T : (\Delta\beta)$$

où $\Delta\mathbb{C} = \mathbb{C}^{(1)} - \mathbb{C}^{(2)}$ et $\Delta\beta = \beta^{(1)} - \beta^{(2)}$

- Sachant aussi que, pour le milieu biphasé :

$$c^{(1)}(\mathbb{A}^{(1)} - \mathbb{I})^T = (\mathbb{C}^{hom} - \langle\mathbb{C}\rangle) : (\Delta\mathbb{C})^{-1}$$

on déduit

$$c^{(1)}\mathbf{a}^{(1)} = -(\Delta\mathbb{C})^{-1} : (\mathbb{C}^{hom} - \langle\mathbb{C}\rangle) : (\Delta\mathbb{C})^{-1} : (\Delta\beta)$$

Relations de Levin pour un milieu biphasé

- Enfin, en substituant dans les expressions des propriétés effectives :

$$\beta^{hom} = \langle \beta \rangle + (\mathbb{C}^{hom} - \langle \mathbb{C} \rangle) : (\Delta \mathbb{C})^{-1} : (\Delta \beta)$$

$$c_\epsilon^{hom} = \langle c_\epsilon \rangle - (\Delta \beta) : (\Delta \mathbb{C})^{-1} : (\mathbb{C}^{hom} - \langle \mathbb{C} \rangle) : (\Delta \mathbb{C})^{-1} : (\Delta \beta)$$

$$\beta^{hom} = \langle \beta \rangle + (\beta_2 - \beta_1) : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)^{-1} : (\mathbb{C}^{hom} - \langle \mathbb{C} \rangle)$$

- Un raisonnement tout à fait similaire conduit pour la dilatation thermique à α :

$$\alpha^{hom} = \langle \alpha \rangle + (\alpha_2 - \alpha_1) : (\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_1)^{-1} : (\mathbb{S}^{hom} - \langle \mathbb{S} \rangle)$$

La problématique de la poroélasticité d'un milieu saturé



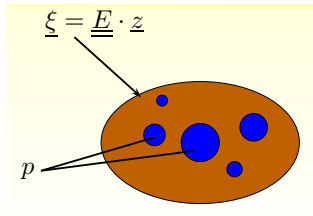
Karl van Terzaghi
(1883 – 1963)



Maurice Anthony Biot
(1905 – 1985)



Olivier Coussy
(1953 – 2010)



$$\sigma = \mathbb{C}(z) : \varepsilon + \tau(z)$$

$$\mathbb{C}(z) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^p \\ \mathbb{C}^s & \text{dans } \Omega^s \end{cases}$$

$$\tau(z) = \begin{cases} -p\mathbf{1} & \text{dans } \Omega^p \\ 0 & \text{dans } \Omega^s \end{cases}$$

Le modèle de poroélasticité macroscopique

- Potentiel d'état effectif

$$\psi^{*hom} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p \mathbf{E} : \mathbf{B}^{hom} - \frac{p^2}{2M^{hom}}$$

- Lois d'état :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \psi^{*hom}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - p \mathbf{B}$$

$$\phi - \phi_0 = -\frac{\partial \psi^*}{\partial p} = \frac{p}{M} + \mathbf{B} : \mathbf{E}$$

avec (cf. p.ex. Dormieux et al. (2006), Microporomechanics, Wiley.)

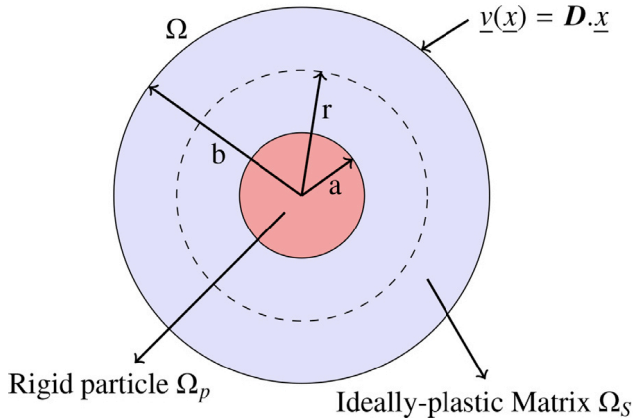
$$\mathbf{B}^{hom} = \mathbf{1} : (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{s-1} : \mathbb{C}^{hom}) \text{ et } \frac{1}{M^{hom}} = (\mathbf{B}^{hom} - \phi_0 \mathbf{1}) : \mathbb{C}^{s-1} : \mathbf{1}$$

Tout comme $\mathbb{C}^{hom}$, le tenseur de Biot, $\mathbf{B}^{hom}$, et le module de Biot, M^{hom} , dépendent de la porosité et sont ainsi susceptibles d'évoluer fortement.

- Adjonction de la loi de Darcy homogénéisée

Homogénéisation et Propriétés de résistance : approche par analyse limite

L'homogénéisation des propriétés de résistance



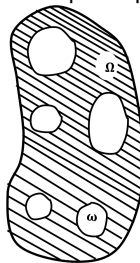
- Données : propriétés de résistance des phases
- Délivrable : Résistance effective (critère macroscopique) du milieu hétérogène

Cas des matériaux poreux ductiles

Leblond, J-B. (2003). Mécanique de la rupture fragile et ductile. Hermès

Problème : trouver le comportement effectif d'un métal plastique poreux

- Ω : Volume total
- ω : Volume des cavités ;
- $\Omega - \omega$: Volume de la matrice
- $f = \frac{\text{vol}(\omega)}{\text{vol}(\Omega)}$ est la porosité du matériau.



(a)

Prolongement des champs mécaniques sur les cavités

- Le champ de contraintes est prolongé par 0
- Le champ de vitesse est prolongé arbitrairement (mais de manière régulière)

Conditions aux limites pour le problème d'homogénéisation

Conditions de contraintes homogènes au bord

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$\boldsymbol{\Sigma}$: tenseur de contraintes macroscopiques

$$\boldsymbol{\Sigma} = (1 - f) \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega - \omega},$$

Définition du taux de déformation macroscopique :

$$\mathbf{D} = \langle \mathbf{d}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega}$$

Note : Ce résultat est indépendant du prolongement de la vitesse choisi

Lemme de Hill-Mandel

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \rangle_{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}.$$

On peut aussi considérer des conditions de taux de déformation homogène au bord

Analyse limite appliquée au matériau poreux

Equivalence entre le critère de résistance et la dissipation plastique

$$\pi(\mathbf{d}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathcal{C}} (\boldsymbol{\sigma}^* : \mathbf{d}).$$

L'application du Lemme de Hill-Mandel donne :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} \leq \Pi(\mathbf{D}),$$

$\mathbf{D}$, arbitraire et indépendant de $\boldsymbol{\Sigma}$.

$$\Pi(\mathbf{D}) = \inf_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} (1 - f) \langle \pi(\mathbf{d}) \rangle_{\Omega - \omega}$$

L'Equation paramétrique de la surface de charge supportable :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}). \quad (2)$$

Procédure de détermination de la surface de charge

La détermination de la surface de charge macroscopique passe par :

1. **Définition d'un Ver Ω matériau poreux ;**
2. **Choix d'un champ de vitesse d'essai $\mathbf{v}$ ciném. admissible avec $\mathbf{D}$;**
3. **Détermination de la dissipation plastique macroscopique $\Pi(\mathbf{D})$, après minimisation ;**
4. **Obtention du domaine de résistance macroscopique $\Sigma = \partial\Pi(\mathbf{D})/\partial\mathbf{D}$.**

NOTE : En général on n'a qu'une majoration $\Pi^+(\mathbf{D})$ de $\Pi(\mathbf{D})$ obtenue par minimisation partielle sur un sous-espace restreint des champs de vitesse.

$\Sigma = \frac{\partial\Pi^+}{\partial\mathbf{D}}(\mathbf{D})$ fournit alors une estimation « par "l'extérieur" de la frontière des chargements macroscopiques supportables

Construction du modèle de Gurson

Analyse-limite d'une sphère creuse sous chargement quelconque
Matrice rigide parfaitement plastique

- Géométrie : sphère creuse
Rayon intérieur : a
Rayon extérieur : b
Porosité : $f = \frac{a^3}{b^3}$

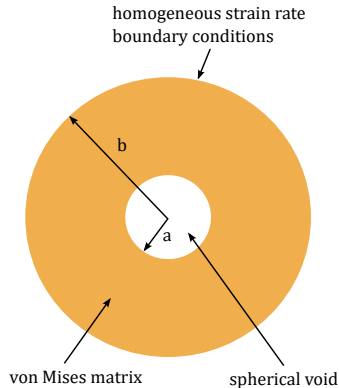


Figure 6 – Cellule sphérique considérée par Gurson

- Conditions aux limites : taux de déformation homogène au

Le critère de Gurson

- **Objectif** : finaliser l'estimation par l'extérieur de la surface de charge macroscopique
- A cette fin, on procède d'abord au **calcul des dérivées de $\Pi^{Gurson}(D)$**
- **Puis à l'élimination des composantes de D** dans les équations paramétriques de la surface de charge approchée

$$\Phi^G(\Sigma, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0.$$

Ladies and Gentlemen : The Gurson criterion, avec

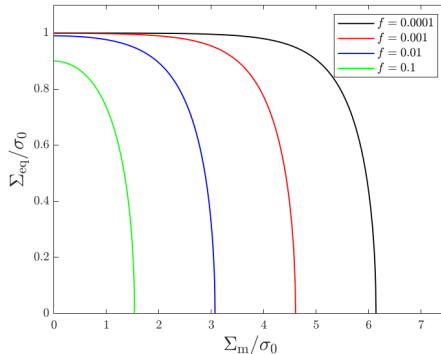
$\Sigma_{eq} \equiv \left(\frac{3}{2} \Sigma' : \Sigma'\right)^{1/2}$: contrainte macroscopique équivalente de von Mises

$\Sigma_m \equiv \frac{1}{3} tr \Sigma$: contrainte macroscopique hydrostatique.

Nouveauté majeure : la contrainte moyenne intervient dans le critère.

Note : Le 3^è invariant du tenseur des contraintes aurait pu y figurer !

Représentation du critère macroscopique



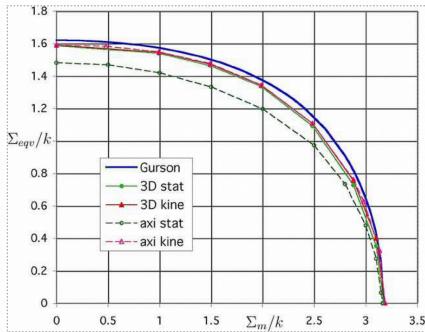
Yield surfaces of Gurson's model for several values of the porosity

Cas particuliers :

- i) **Chargement purement déviatorique** : $\Sigma_{eq} \leq (1 - f)\sigma_0$
- ii) **Chargement hydrostatique** : $|\Sigma_m| \leq -\frac{2}{3}\sigma_0 \ln f$

Evaluation du critère (par Trillat et Pastor, EJM, 2005)

- Reformulation du problème d'AL. numérique sous forme d'un **problème d'optimisation conique**, en s'appuyant sur le code Mosek
- **Bornes sup.** (approche par l'extérieur) et **inf.** (appr. par l'intérieur)

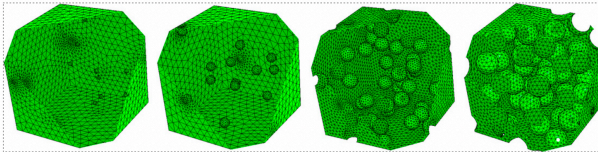


Yield criterion. Comparison with the axisymmetric method. Porosity 6,4%, 14,000-tetrahedron mesh.

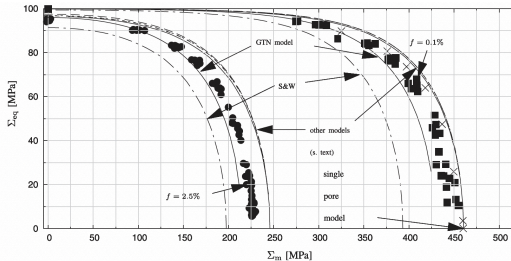
- Confirmation du statut de borne supérieure du critère
- Excellente précision du critère, excepté pour les très faibles triaxialités

Matériaux poreux ductiles avec plusieurs vides

Effets de l'interaction des vides sur le critère de plasticité (Fritzen et al., 2010)



Discretizations of microstructures containing 0.1, 1, 10 and 30% of pores as used in the statistical studies.



Comparison of the GTN $q_1 = 1.5, q_2 = 1, q_3 = q_1^2$, the Gurson-HS estimate (Leblond et al., 1994; Garajeu and Suquet, 1997), with the computational results for $f = 0.1\%, 2.5\%$, the lower bound of Sun and Wang (1995) is also shown.

Fabrique de loi !

Loi de normalité : elle passe à l'échelle macroscopique. C'est un résultat général d'analyse-limite et d'homogénéisation (Hill, 1967 ; Rice, 1971) :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}(\Sigma) \quad \dot{\lambda} \begin{cases} = 0 & \text{si } \Phi(\Sigma) < 0 \\ \geq 0 & \Phi(\Sigma) = 0 \end{cases}$$

$\Phi(\Sigma)$ fonction de charge macroscopique

- **Loi d'évolution de la porosité** déduite de la conservation de la masse :

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr} \mathbf{D} = (1 - f) \text{tr} \mathbf{D}^p$$

L'évolution de la porosité est entièrement déterminée par celle de $\mathbf{D}^p$

- **Note** : Il reste en suspens l'importante question du couplage avec l'élasticité.

L'homogénéisation en non linéaire (Cf. Cours M. Idiart)

(Les 23 problèmes du colloque d'Aussois !)

En référence, certes indirecte, aux 23 exposés invités de la semaine d'Aussois !

Les 23 problèmes d'Aussois....regroupés

- 1 : Les microstructures aléatoires et évolutives
- 2 : Le Nonlinéaire
- 3 : Le rapprochement avec les mesures de champs
- 4 : Les couplages multiphysiques
- 5 : Vers un mariage d'intérêt entre la physique des milieux hétérogènes et l'IA ?
- 6 : Instabilités dans les milieux hétérogènes
- 7 : Obtention de milieux continus généralisés
- 8 : L'enjeu des milieux architecturés
- 9 : Le *computational* Micromechanics
- 10 : Ponts avec les très petites échelles

et bien d'autres..

1- Sur la modélisation milieux aléatoires



Modélisation milieux aléatoires

(emprunt de D. Jeulin)

Modelling random media

In materials, geological and biological structures: heterogeneous properties at various scales → **probabilistic approach** → estimation of spoiled or missing data, or physical properties of heterogeneous media

- Random structure characterization
- Introduction of the **variability** by random morphological models at the **micro scale**
- Prediction of the average **macroscopic** response of random media from their microstructure

Modélisation milieux aléatoires : les possibilités aujourd'hui

(emprunt de D. Jeulin)

- Random models of structures → simulate **complex morphology** of microstructures
- Approach, based on measurements obtained by **image analysis** → test and select appropriate models, estimate their parameters
- Prediction** of **overall physical properties** of materials, and modeling **fracture statistics** behaviour
- Possible use in the **synthesis of textures**
- Simulations to feed deep learning tools like CNN (Convolutional Neural Network)

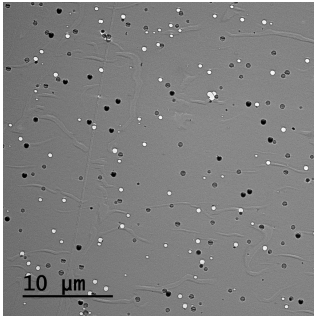
Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. (2003).
Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. International Journal of solids and structures, 40(13-14), 36 -3679

2- Homogénéisation des nanocomposites



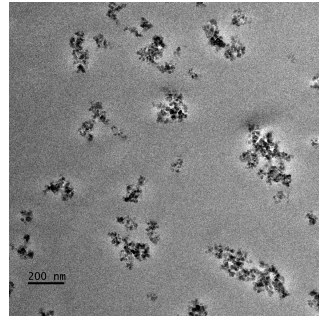
Homogénéisation des nanocomposites

Clichés MET des nanocomposites



2%/500nm

Particules bien dispersées

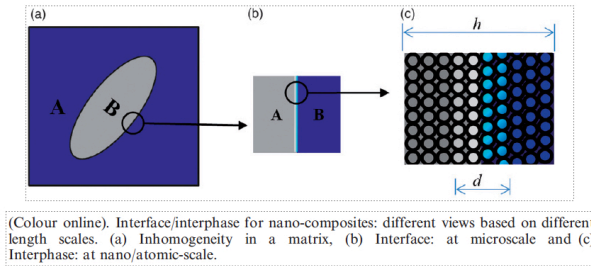


2%/15nm

Agrégats de particules

Clichés issu de Adoté Sitou BLIVI (2018). Effet de taille dans les polymères nano-renforcés : caractérisation multi-échelles et modélisation. Thèse de doctorat, UTC. Difficultés de dispersion aux petites tailles.

Homogénéisation des nanocomposites



(d'après Paliwal and Cherkaoui (2011), Philosophical Magazine, 91 :30, 3905-3930)

Une extension des bornes d'Hashin-Shtrikman (voir les cours de S. Brisard, et en partie de L. Gélébart et M. Idiart) a été proposée dans :

- Brisard, S., Dormieux, L. and Kondo D. (2010)a. Hashin–Shtrikman bounds on the bulk modulus of a nanocomposite with spherical inclusions and interface effects. Computational Materials Science 48 (3), 589-596
- Brisard, S., Dormieux, L. and Kondo D. (2010)b. Hashin–Shtrikman bounds on the shear modulus of a nanocomposite with spherical inclusions and interface effects. Computational Materials Science 50 (2), 403-410