

Bornes des modules effectifs pour les composites à renforts particuliers et interfaces imparfaites

C. Stolz

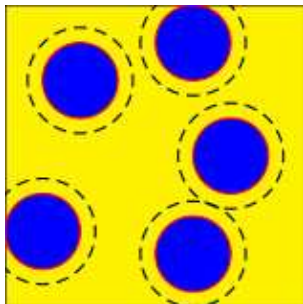
29 janvier 2025

-

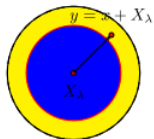
Science sans conscience n'est que ruine de l'âme, Rabelais
Nihil est in intellectu quod non fuerit in sensu, Leibnitz

Introduction-Rappel

- ▶ Principes variationnels en élasticité linéaire et encadrement
- ▶ Milieu élastique de référence
- ▶ Champs C.A et S.A : équation intégrale -polarisation et problèmes auxiliaires
- ▶ Conditions de fermeture : relations entre moyenne et polarisation
- ▶ Distribution spatiale des phases: isotropie spatiale : problèmes d'inclusion composite dans le milieu de référence
- ▶ Optimisation du milieu de référence et bornes



- ▶ phase : matrice
- ▶ motif
(inclusion-matrice)



Remarque : les D_λ sont des domaines géométriques

Dualité et relations de moyenne

Introduction des fonctions caractéristiques pour les phases mécaniques

$$\phi_r(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_r \\ 0 & x \in \Omega - \Omega_r \end{cases}$$

Donc $p = \sum_r p_r \phi_r(x)$, Alors

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} p : \varepsilon \, d\Omega = \sum_r p_r \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon(x) \phi_r(x) \, d\Omega = \sum_r f_r p_r \bar{\varepsilon}_r$$

On a ainsi par dualité les moyennes

$$\hat{\varepsilon}_m = \frac{1}{\Omega_r} \int_{\Omega} \varepsilon : \phi_r \, d\Omega, f_r = \frac{\Omega_r}{\Omega}$$

Fonctions caractéristiques pour les motifs D_λ centrés en X_λ^i ,
 $i = 1, \dots, N_\lambda$

$$\phi_\lambda(y) = \begin{cases} 1, & \exists(i, \lambda)y = x + X_\lambda^i, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit un champ P_λ identique dans chacun des motifs D_λ :
 $P(y) = \sum_\lambda P_\lambda(x) \phi_\lambda(y)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} P(y) : \varepsilon(y) \, d\Omega &= \sum_{\lambda} \sum_{i=1}^{N_\lambda} \frac{1}{\Omega} \int_{D_\lambda} P_\lambda(x) : \varepsilon(x + X_\lambda^i) \, d\Omega \\ &= \sum_{\lambda} f_\lambda \frac{1}{D_\lambda} \int_{D_\lambda} P_\lambda(x) : \varepsilon_\lambda^M(x) \, d\Omega \end{aligned}$$

$$\varepsilon_\lambda^M(x) = \frac{1}{N_\lambda} \sum_i \varepsilon(x + X_\lambda^i), f_\lambda = \frac{N_\lambda D_\lambda}{\Omega}$$

On considère que l'on impose la déformation sur la frontière du composite et des interfaces parfaites

$$-W^*(\sigma^*) + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma^* \cdot u^d \, dS \leq -W^*(\sigma) + \int_{\partial\Omega} n \cdot \sigma \cdot u^d \, dS = W(u) \leq W(u')$$

où u, σ solution du problème d'élasticité hétérogène,

- ▶ u' est un champ Cinématiquement Admissible : $u' = u^d = \mathbf{E} \cdot x$,
 $[u']_s = 0$
- ▶ σ^* est Statiquement Admissible, $\text{div } \sigma^* = 0$, $[\sigma^*]_s \cdot n = 0$.

Pour les interfaces imparfaites :

- ▶ $[u]_s \neq 0$
- ▶ $[\sigma^*]_s \cdot n \neq 0$

Caractérisation : Interface imparfaite

L'interface S est une surface : plan A_α , normale n

S^+ et S^- sont les deux faces opposées de la surface

$$u^\pm = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} u(X^1, X^2, \pm \eta n)$$

On définit alors sur l'interface

$$[u]_S = u^+ - u^-, \quad \bar{u} = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$$

Au cours de la déformation, l'interface se déforme

$$\epsilon_s(\bar{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + \nabla^t \bar{u})$$

A ces quantités on associe une puissance d'efforts intérieurs

$$\mathcal{P}_s(u^*) = - \int_S T_s \cdot [u]_S \, dS - \int_S \Sigma_s : \epsilon_s(\bar{u}) \, dS$$

Considérant la puissance des efforts intérieurs dans la matrice et les renforts et la puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(u) \, d\Omega, \quad \mathcal{P}_e = \int_{\partial\Omega} T^e \cdot u \, ds$$

$$\mathcal{P}_s(u^*) = - \int_S T_s \cdot [u]_s \, ds - \int_S \boldsymbol{\Sigma}_s : \boldsymbol{\varepsilon}_s(\bar{u}) \, dS$$

PPV : somme des puissances est nulle, pour tout champ de déplacement u .

Après intégration par partie : équations de la statique

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = T^e, \text{ sur } \partial\Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\pm \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} T_s \pm \frac{1}{2} \operatorname{Div} \boldsymbol{\Sigma}_s$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = T_s, \quad [\boldsymbol{\sigma}]_s \cdot \mathbf{n} = - \operatorname{Div} \boldsymbol{\Sigma}_s$$

Loi de comportement de l'interface

Energie de déformation de l'interface

$$\Phi([u]_s, \epsilon_s(\bar{u}))$$

convexe de ses arguments

$$T_s = \frac{\partial \Phi}{\partial [u]_s}, \quad \Sigma_s = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_s}$$

Energie complémentaire ou duale

$$\Phi^*(T_s, \Sigma_s)$$

On choisira dans la suite

$$\Phi = \frac{1}{2} [u]_s \cdot \mathbf{k}_s \cdot [u]_s + \frac{1}{2} \epsilon_s : \mathbb{K}_s : \epsilon_s$$

Milieu de référence - choix des polarisations

Dans le volume : $\text{div } \sigma = 0$

$$\sigma = \mathbb{C}(x) : \varepsilon = \mathbb{C}_o : \varepsilon + P(x), \quad P(x) = (\mathbb{C}(x) - \mathbb{C}_o) : \varepsilon(x)$$

$$\bar{\sigma} \cdot n = T_s, \quad [\sigma]_s \cdot n = -\text{Div } \Sigma_s, \quad [u]_s = U(s)$$

Remarque

$$\langle \sigma \rangle = \mathbb{C}_o : \langle \varepsilon \rangle + \langle P \rangle \quad \begin{cases} \bar{\sigma}^m &= \mathbb{C}_o : \hat{e}_m + p_m, \in \Omega_m \\ \sigma_M^\lambda &= \mathbb{C}_o : \varepsilon_M^\lambda + P_M^\lambda(x), \end{cases}$$

$$\bar{\sigma}_M^\lambda \cdot n = T_M^\lambda, \quad [\sigma_M^\lambda]_s \cdot n = -\text{Div } \Sigma_M^\lambda$$

Idée

$$T_M^\lambda = T^\lambda, \quad \Sigma_M^\lambda = \Sigma_s^\lambda, \quad U(s) = U^\lambda(s), \\ P_M^\lambda(x) = P_\lambda(x), \quad p_m$$

Equations intégrales

Pour un milieu $\mathbb{C}_o$ avec des forces de volume $\text{div } P$, de surface $\text{Div } \Sigma_s$ et des discontinuités U sur S , dans un volume Ω soumis à des déplacements imposés sur sa frontière, la solution du problème d'élasticité est donné par G_o opérateur de Green du milieu de référence:

$$u = u_o + \int_{\Omega} G_o : \text{div } P \, d\Omega - \int_S n \cdot (\mathbb{C}_o : \nabla G_o) \cdot U \, dS + \int_S G_o \cdot \text{Div } \Sigma_s \, dS$$

Par dérivation on a l'opérateur de Lippmann-Schwinger modifié

$$\varepsilon + \int_{\Omega} \overset{o}{\Gamma} : P \, d\Omega + \int_S \overset{o}{\Gamma} : \mathbb{C}_o : (n \otimes U) \, dS + \int_S \overset{o}{\Gamma} : \Sigma_s \, dS = \varepsilon_o$$

Considérons maintenant des champs de polarisation particulier

$$p_m, \quad P_{\lambda}, \quad U^{\lambda}, \quad \Sigma_s^{\lambda}$$

Distribution spatiale isotrope des phases et des motifs (CRAS,1991)

$$\bar{\Gamma}^{o rs} = \int_{\Omega} \bar{\Gamma}^o(x-y) \phi_{rs}(\|x-y\|) \, d\Omega = \mathbb{E} \delta_{rs}$$

$$\int_{\Omega} \bar{\Gamma}^o(y, x + X_{\lambda}^i) \phi_{r\lambda}(\|y - x + X_{\lambda}^i\|) \, d\Omega = 0$$

$$\bar{\Gamma}_{MM}^{o \lambda \mu} = N_{\lambda} \bar{\Gamma}^o(x, y) \delta_{\mu}^{\lambda}$$

Les interactions sont nulles !

$$\epsilon + \int_{\Omega} \overset{o}{\Gamma} : \langle P \rangle \, d\Omega + \int_S \overset{o}{\Gamma} : \mathbb{C}_o : (n \otimes U^\lambda) \, dS + \int_S \overset{o}{\Gamma} : \boldsymbol{\Sigma}_s^\lambda \, dS = \epsilon_o$$

Propriétés :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_o : \epsilon + \langle P \rangle, \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$$

$$[\boldsymbol{\sigma}]_s \cdot n = - \text{Div } \boldsymbol{\Sigma}_s^\lambda,$$

$$[u]_s = U^\lambda$$

Mais

$$T_s \neq T^\lambda, \quad \epsilon_s(\bar{u}) \neq \epsilon_s(\bar{u})_M^\lambda$$

Ajout du comportement

$$p_m = (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_o) : \hat{\varepsilon}_m, \quad P_M^\lambda = P_\lambda(x) = (\mathbb{C}(x) - \mathbb{C}_o) : \varepsilon_M^\lambda(x)$$

$$\bar{\sigma}_M^\lambda \cdot n = k_s \cdot U^\lambda, \quad \Sigma_s^\lambda = \mathbb{K}_s : \varepsilon_s(\bar{u}_M^\lambda)$$

Deux problèmes auxiliaires :

- Inclusion milieu de référence :

$$\hat{\varepsilon}_m + \mathbb{E} : (\mathbb{C}_m - \mathbb{C}_o) : \hat{\varepsilon}_m = \varepsilon_o$$

- Motif avec interface imparfaite

$$\begin{aligned} \varepsilon_M^\lambda(x) + \int_{D_\lambda} \overset{o}{\Gamma}(x, y) (\mathbb{C}(y) - \mathbb{C}_o) : \varepsilon_M^\lambda(y) \, d\Omega \\ + \int_{S_\lambda} \overset{o}{\Gamma} \cdot \mathbb{C}_o : (n \otimes U^\lambda) + \overset{o}{\Gamma} : \Sigma_s^\lambda \, dS = \varepsilon_o \end{aligned}$$

Remarque: $\Delta \mathbb{C} = \mathbb{C} - \mathbb{C}_o$, $\mathbb{H} = \Delta \mathbb{C}^{-1}$, $\langle \mathbb{H} : P \rangle = \langle \varepsilon \rangle$

$$\left(\Delta \mathbb{C} : \varepsilon \right)_M^\lambda \neq \Delta \mathbb{C}_M^\lambda : \varepsilon_M^\lambda, \quad \mathbb{H}_M^\lambda : P_\lambda = \varepsilon_M^\lambda \text{ (CRAS 1991)}$$

Résumé :

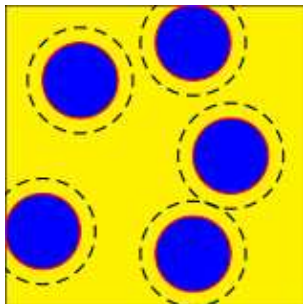
$$\langle \varepsilon \rangle = \begin{cases} \hat{\varepsilon}_m = \mathbf{A}_m : \varepsilon_o & \text{dans } \Omega_m \\ \varepsilon_M^\lambda(x) = \mathbf{A}_\lambda(x) : \varepsilon_o & \text{sur } D_\lambda \end{cases}$$

Comportement estimé du milieu effectif pour un $\mathbb{C}_o$ donné

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_m f_m \hat{\varepsilon}_m + \sum_\lambda f_\lambda \left(\int_{D_\lambda} \varepsilon_M^\lambda d\Omega - \int_{S_\lambda} (n \otimes U^\lambda) dS \right) \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \sum_m f_m \mathbb{C}_m : \hat{\varepsilon}_m + \sum_\lambda f_\lambda \left(\int_{D_\lambda} \mathbb{C} : \varepsilon_M^\lambda d\Omega - \int_{S_\lambda} \boldsymbol{\Sigma}_s^\lambda dS \right) \\ &= \mathbb{C}^{est} : \mathbf{E} \end{aligned}$$

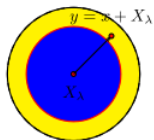
Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum \langle \varepsilon \rangle \langle f \rangle - f_\lambda \int_{S_\lambda} (n \otimes U^\lambda) dS \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \sum \langle \mathbb{C} : \varepsilon \rangle \langle f \rangle - f_\lambda \int_{S_\lambda} \boldsymbol{\Sigma}_s^\lambda dS \end{aligned}$$



$$\varepsilon(y)$$

- ▶ phase : matrice
 $\langle \varepsilon \rangle = \hat{\varepsilon}_m$
- ▶ motif
 (inclusion-matrice)



$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_M^\lambda(x)$$

Optimisation

$$\mathcal{E}(u_{sol}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon_{sol} : \mathbb{C} : \epsilon_{sol} \, d\Omega + \int_S \Phi([u_{sol}]_S, \epsilon_s(\bar{u}_{sol})) \, dS \leq \mathcal{E}(u)$$

où u est la solution du problème avec les champs de polarisation vérifiant en moyenne le comportement

$$\langle q \rangle = \begin{cases} \hat{q}_m, & x \in \Omega_m, \\ q_M^\lambda(x), & x \in D_\lambda^i \end{cases}$$

Problème équilibre

$$0 = \operatorname{div}(\mathbb{C}_o : \epsilon + \langle P \rangle), \quad \langle P \rangle = (\mathbb{C} - \mathbb{C}_o) : \langle \epsilon \rangle$$

$$U^\lambda = [u]_S, \quad [\sigma]_S \cdot n = -\operatorname{Div} \Sigma_S^\lambda, \text{ sur } S$$

Evaluons $\mathcal{E}(u)$

$$\mathcal{E}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon : \mathbb{C} : \epsilon \, d\Omega + \int_S \Phi(U^\lambda, \epsilon_s(\bar{u})) \, dS$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{\sigma} - \langle \mathbf{P} \rangle) \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{\varepsilon} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle) : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle) \\
&= \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_0) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Posons $\Delta q = q - \langle q \rangle$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega &= \int_{\partial\Omega} n \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \, dS - \int_S n \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}]_s \, dS \\
n \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}]_s &= n \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot [\mathbf{u}]_s - \text{Div} \, \boldsymbol{\Sigma}_s^\lambda \cdot \bar{\mathbf{u}} \\
\int_S n \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}]_s &= N_\lambda \int_{S_\lambda} T^\lambda \cdot U^\lambda + \boldsymbol{\Sigma}_s^\lambda : \boldsymbol{\varepsilon}_s(\bar{\mathbf{u}}_M^\lambda) \, dS \\
&= N_\lambda \int_{S_\lambda} \Phi(U^\lambda, \boldsymbol{\varepsilon}_s(\bar{\mathbf{u}}_M^\lambda)) \, dS = \int_S \Phi(U^\lambda, \boldsymbol{\varepsilon}_s(\bar{\mathbf{u}}_M^\lambda)) \, dS \\
\int_S \Phi(U^\lambda, \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}})) - \Phi(U^\lambda, \boldsymbol{\varepsilon}_s(\bar{\mathbf{u}}_M^\lambda)) \, dS &= \int_S \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s : \mathbb{K}_s : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s \, dS
\end{aligned}$$

Energie potentielle

$$\mathcal{E}(u) = \Omega \frac{1}{2} \mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma} + Q(\mathbb{C}_o)$$

$$\begin{aligned} 2Q(C_o) = & \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : (\mathbb{C} - \mathbb{C}_o) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle) \, d\Omega \\ & + \int_S (\boldsymbol{\varepsilon}_S - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_S \rangle) : \mathbb{K}_S : (\boldsymbol{\varepsilon}_S - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_S \rangle) \, dS \end{aligned}$$

Choisir $\mathbb{C}_o$ tel que $Q(\mathbb{C}_o) \leq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_m f_m \hat{\mathbf{e}}_m + \sum_{\lambda} f_{\lambda} \left(\int_{D_{\lambda}} \boldsymbol{\varepsilon}_M^{\lambda} \, d\Omega - \int_S [n \otimes \mathbf{U}^{\lambda}]_s \, dS \right) \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \sum_m f_m \mathbb{C}_m : \hat{\mathbf{e}}_m + \sum_{\lambda} f_{\lambda} \left(\int_{D_{\lambda}} \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_M^{\lambda} \, d\Omega - \int_S \boldsymbol{\Sigma}_s^{\lambda} \, dS \right) \\ &= \mathbb{C}^+ : \mathbf{E} \end{aligned}$$

Par un raisonnement identique

$$2W^*(\sigma) = -\Omega \Sigma : \mathbf{E} - Q^*(S_o)$$

$$Q^*(S_o) = \int_{\Omega} (\sigma - \langle P \rangle : S_o : Q) : (S - S_o) : (\sigma - Q : S_o : \langle P \rangle) d\Omega \\ + \int_S (T - T^\lambda) \cdot \mathbf{k}_s^{-1} \cdot (T^* - T^\lambda) dS$$

Bornes pour $Q^*(S_o) \leq 0 : S - S_o \leq 0$ ou ≥ 0 .

In fine : $\mathbf{k}_s = \infty, \mathbb{K}_s = 0$ pas de discontinuité : Hashin-Shtrikman par phases ou motifs

Interprétation équation intégrale : sur le motif D_λ

$$u(x + X_\lambda^i) = u(X_\lambda^i) + u^\lambda + u'(x), x \in S$$

$$u^\lambda(x) = \left(u(x + X_\lambda^i) - u(X_\lambda^i) \right)_M^\lambda$$

Il convient donc de générer des fluctuations $u'(x), x \in S$:

- ▶ 2D séries de Fourier, Legendre,
- ▶ 3D fonctions harmoniques sphériques.

Remarque : le déplacement u' est par définition **continu** sur S de même le **vecteur contrainte** associé !

Pour obtenir un encadrement on doit résoudre

- ▶ problème d'inclusion (phase) dans le milieu de référence
- ▶ problème d'inclusions composite (motif) avec interface imparfaite
- ▶ problème d'inclusion composite (motif avec interface parfaite pour chaque mode de Fourier ou fonction harmonique sphériques
- ▶ résoudre les problèmes de bornes sur $Q(\mathbb{C}_o)$, $Q^*(\mathbb{S}_o)$

Mode antiplan : Motif $c = a^2/R_e^2$, $u = T(r) \cos \theta$, $q_\infty = Q_o e_x$

$$T(r) = A_2 r, \quad r < a, \quad T(r) = A_1 r + b_1 \frac{a^2}{r}, \quad a < r < R_e, \quad T(r) = A_o r + b_o \frac{a^2}{r}, \quad r > R_e$$

Conditions aux limites : $Q_o = K_o A_o$

$$r = a, \quad 2k_s[T]_s = 2k_s a (A_1 + b_1 - A_2) = 2\bar{q} = K_2 A_2 + K_1 (A_1 - b_1)$$

$$[q]_s = K_1 (A_1 - b_1) - K_2 A_2 = \frac{K_s}{2a} (A_2 + A_1 + b_1) = \frac{K_s}{2a} \bar{T}$$

$$r = R_e, \quad A_o + b_o = A_1 + b_1 c, \quad K_o (A_o - b_o) = K_1 (A_1 - b_1 f)$$

Motif Notations : $\bar{K}_s = \frac{K_s}{2a}$, $\bar{k}_s = 2ak_s$, $\Delta = 2K_1(\bar{K}_s - \bar{k}_s)$

$$\alpha = 2K_1K_2 + 2\bar{K}_s\bar{k}_s + (\bar{K}_s + \bar{k}_s)(K_1 + K_2)$$

$$\beta = 2K_1K_2 - 2\bar{K}_s\bar{k}_s + (\bar{K}_s + \bar{k}_s)(K_1 - K_2)$$

$$Q_o = 2K_oA_o$$

$$Q_o\Delta = A_2(\alpha(K_o + K_1) + c\beta(K_o - K_1))$$

$$A_1 = \frac{Q_o\alpha}{\alpha(K_o + K_1) + c\beta(K_o - K_1)}$$

$$b_1 = \frac{Q_o\beta}{\alpha(K_o + K_1) + c\beta(K_o - K_1)}$$

Mode antiplan : Inclusion

$$A_I = A_o + b_o, \quad K_1 A_I = K_o(A_o - b_o), \quad A_I = \frac{2Q_o}{K_o + K_1}$$

Solution Composite

$$Q = \mathbf{K}^{est} \cdot \nabla T$$

$$Q \cdot \underline{e}_r = f_\lambda K_1 (A_1 - b_1 c) + (1 - f_\lambda) K_1 A_I,$$

$$\nabla T \cdot \underline{e}_r = f_\lambda (A_1 + b_1 c) + (1 - f_\lambda) A_I$$

Perturbation

$$T'(r) = A_2 r^n \cos(n\theta) \quad T'(r) = (A_1 r^n + b_1 \frac{a^{2n}}{r^n}) \cos(n\theta)$$

Continuité des champs et des flux en $r = a$

$$A_2 = 2 \frac{K_1 \mathcal{T}}{\delta}, A_1 = \frac{K_1 + K_2}{\delta} \mathcal{T}, b_2 = \frac{K_2 - K_1}{\delta} \mathcal{T}$$

$$\delta = K_1 + K_2 + c^n (K_1 - K_2), \quad \mathcal{T} = \frac{T(R_e)}{R_e^n}, \quad \bar{K}_s = a K_s$$

Valeur de l'énergie potentielle

$$\frac{Q(K_o)}{2a\pi R_e^{2n}} = (K_2 - K_o)A_2^2 c^n + (K_1 - K_o)(1 - c^n)(A_1^2 + b_1^2 c^n) + \bar{K}_s A_2^2 n c^n \leq 0$$

Soit $K_M = \max(K_i)$, $K_m = \min(K_i)$,

$$\begin{aligned} \frac{Q(K_o)\delta^2}{2a\pi R_e^{2n} \mathcal{T}^2} &\leq (K_M - K_o)C + \bar{K}_s 4K_M^2 n c^n \\ &\leq K_M \max C - K_o \min C + \bar{K}_s 4K_M^2 n c^n \leq 0 \end{aligned}$$

$$4K_m^2 \leq C = (4K_1^2 c^n + (1 - c^n)((K_1 + K_2)^2 + (K_1 - K_2)^2 c^n)) \leq 4K_M^2$$

Soit

$$K_o \geq K_o^+ = K_M + \bar{K}_s \frac{K_M^2}{K_m^2} \max n c^n$$

Problème complémentaire
 On a une borne inférieure pour

$$\frac{1}{K_o} \geq \frac{1}{K_o^-} + \frac{1}{k_s} \frac{K_M^2}{K_m^2} \max nc^n$$

$$\exists p/pc^p \geq nc^n, \quad \frac{p-1}{p} \leq c \leq \frac{p+1}{p}$$

Conclusions

Sous les hypothèses d'isotropie spatiale des phases et des motifs on a étendu les approches variationnelles d'Hashin-Shtrikman par motifs au cas des interfaces imparfaites. ($\mathbf{k}_s = 0, \mathbb{K}_s = \infty$)

Remarque : pour des modules de référence pris infiniment rigides ou infiniment mous, on retrouve les bornes de Hashin pour le cas des discontinuités en déplacement.

Pour la loi d'interface $\mathbf{k}_s = 0, \mathbb{K}_s$ on retrouve les bornes supérieures
Brisard et al.

- ▶ C. Stolz, A. Zaoui, *Combined variational approach and morphological analysis to the behaviour of inhomogeneous elastic media*, C. R. Acad. Sci., Série II A, 312 (1991), no. 3, p. 143-150.
- ▶ M. Bornert, C. Stolz, A. Zaoui, *Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity*, J. Mech. Phys. Solids 44 (1996), no. 3, p. 307-331.
- ▶ S. Brisard, L. Dormieux, D. Kondo, *Hashin-Shtrikman bounds on the bulk modulus of a nano-composite with spherical inclusions and interface effects*, Comput. Mater. Sci. ,48 (2010), p. 589-596.
- ▶ S. Brisard, L. Dormieux, D. Kondo, *Hashin–Shtrikman bounds on the shear modulus of a nanocomposite with spherical inclusions and interface effects*, Comput. Mater. Sci. ,50 (2010), p. 403-410.
- ▶ H. Duan, J. Wang, Z. Huang, B. Karimloo, *Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano inhomogeneities with interface stress*, J. Mech. Phys. Solids, 53 (2005), no. 7, p. 1574-1596.
- ▶ C. Stolz ,Comptes Rendus. Mécanique, (2024), Vol. 352, p. 39-54.