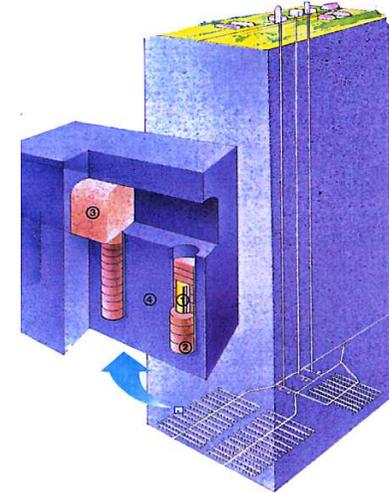
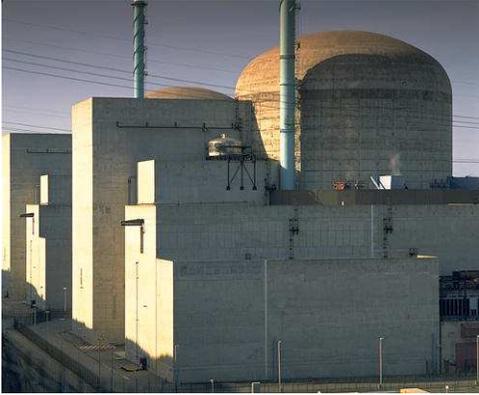


Critère énergétique, modèle cohésif et endommagement continu

Eric Lorentz
Sam Cuvilliez



Contexte industriel : production d'électricité



FOCUS

**Propagation de fissures
dans les structures en béton
(échelle : plusieurs mètres)**

Des modèles adaptés aux études

Des modèles adaptés aux études

<i>initiation amorçage</i>	<i>critères contrainte / ténacité</i>	<i>OK (post-traitement)</i>
--------------------------------	---	---------------------------------

Des modèles adaptés aux études

<i>initiation amorçage</i>	<i>critères contrainte / ténacité</i>	<i>OK (post-traitement)</i>
<i>propagation (trajet connu)</i>	<i>zones cohésives</i>	<i>non linéaire raide instabilités</i>

Des modèles adaptés aux études

<i>initiation amorçage</i>	<i>critères contrainte / ténacité</i>	<i>OK (post-traitement)</i>
<i>propagation (trajet connu)</i>	<i>zones cohésives</i>	<i>non linéaire raide instabilités</i>
<i>trajet de fissuration physique fine</i>	<i>endommagement continu</i>	<i>non linéaire raide instabilités localisation</i>

Des modèles adaptés aux études

<i>initiation amorçage</i>	<i>critères contrainte / ténacité</i>	<i>OK (post-traitement)</i>
<i>propagation (trajet connu)</i>	<i>zones cohésives</i>	<i>non linéaire raide instabilités</i>
<i>trajet de fissuration physique fine</i>	<i>endommagement continu</i>	<i>non linéaire raide instabilités localisation</i>

Quelles garanties de cohérence ?

Plan de la présentation

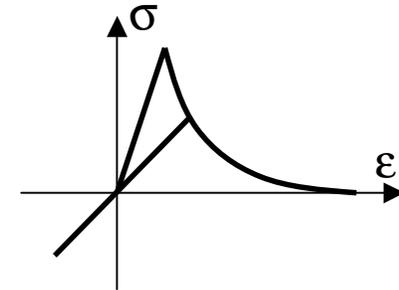
- 1. Modèle d'endommagement à gradient**
- 2. De l'endommagement à la fissure cohésive**
- 3. Comparaisons numériques en 2D**

Endommagement à gradient

Hypothèses de comportement

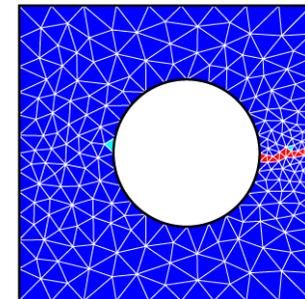
Endommagement quasi-fragile

- Elasticité + endommagement



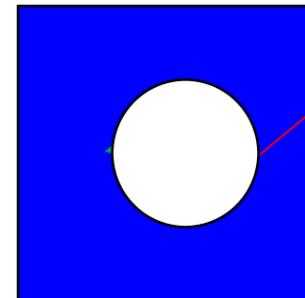
Hypothèses simplificatrices

- Endommagement isotrope
- Pas de dommage de compression
- Pas de fermeture de fissures
- Pas de déformations irréversibles



Modélisation non locale

- Description physique adaptée aux forts gradients
- Introduction du gradient d'endommagement



Modèle d'endommagement à gradient

Variables d'état

Déformation ε

Endommagement a

Modèle d'endommagement à gradient

Variables d'état

Déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$

Endommagement a

Contrainte - déformation

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(a) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Modèle d'endommagement à gradient

Variables d'état

Déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$

Endommagement a

Contrainte - déformation

$$\boldsymbol{\sigma} = A(a) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Equation d'évolution

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, a) = -A'(a) w(\boldsymbol{\varepsilon}) - k + c \nabla^2 a$$

$$f \leq 0 \quad ; \quad \dot{a} \geq 0 \quad ; \quad \dot{a} f = 0$$

Modèle d'endommagement à gradient

Variables d'état

Déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$

Endommagement a

Contrainte - déformation

$$\boldsymbol{\sigma} = A(a) \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Conditions aux limites

$$\nabla a \cdot \mathbf{n} = 0$$

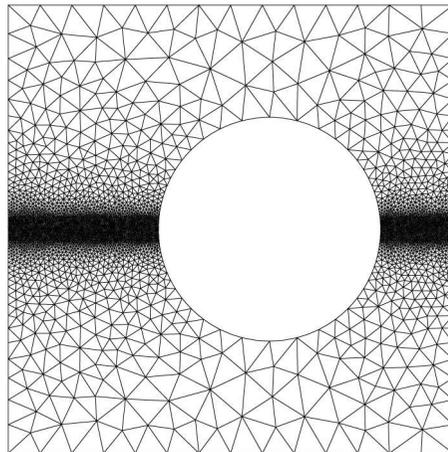
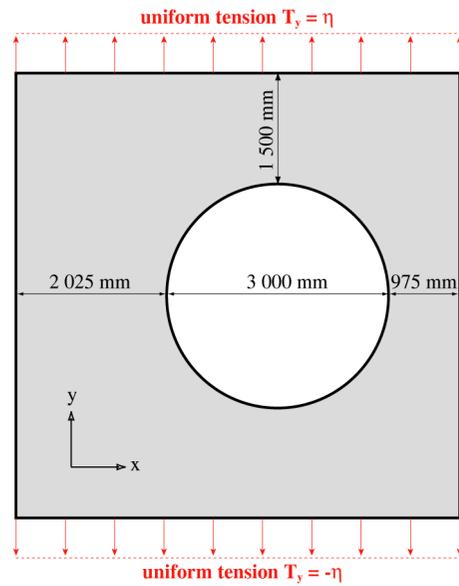
$$[[a]] = 0 \quad [[\nabla a]] \cdot \mathbf{v} = 0$$

Equation d'évolution

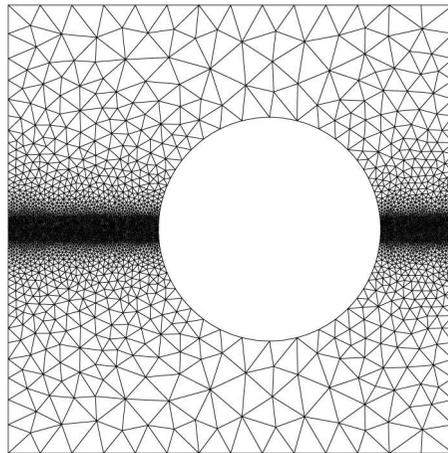
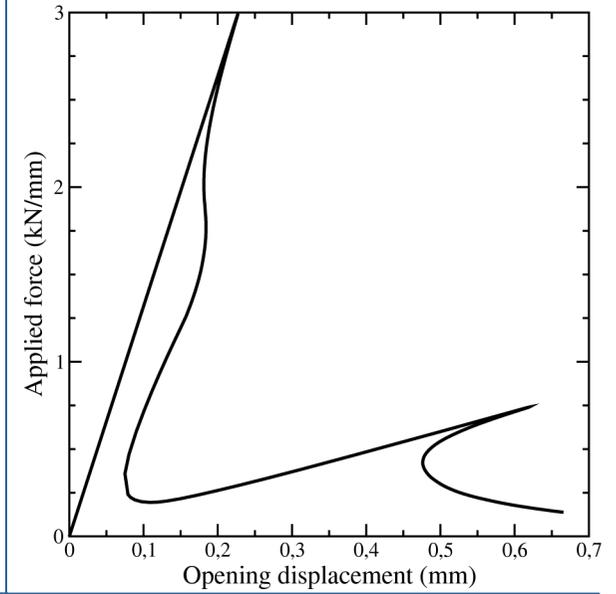
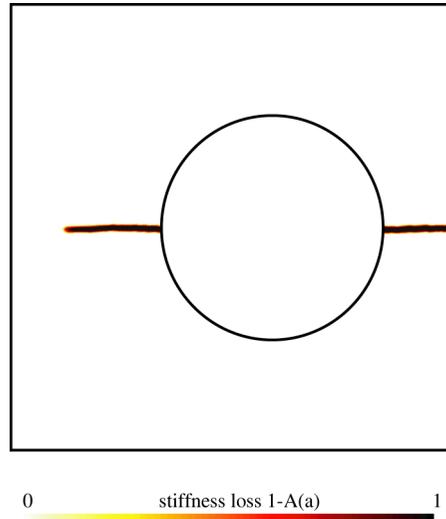
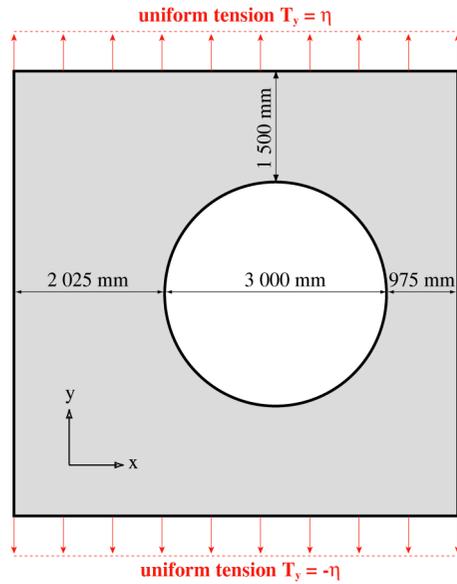
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, a) = -A'(a) w(\boldsymbol{\varepsilon}) - k + c \nabla^2 a$$

$$f \leq 0 \quad ; \quad \dot{a} \geq 0 \quad ; \quad \dot{f} = 0$$

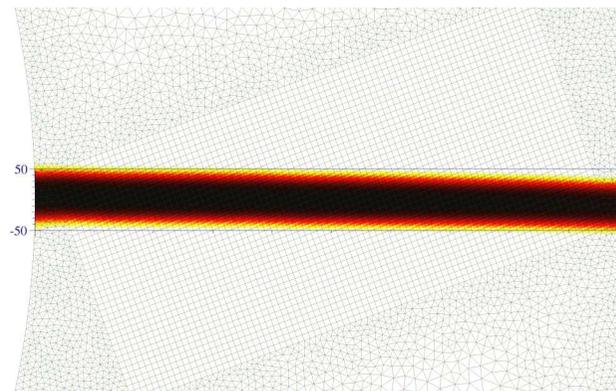
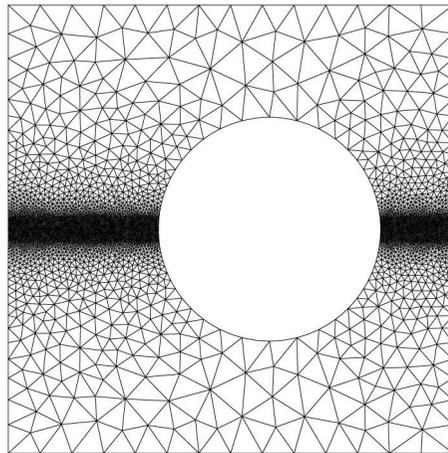
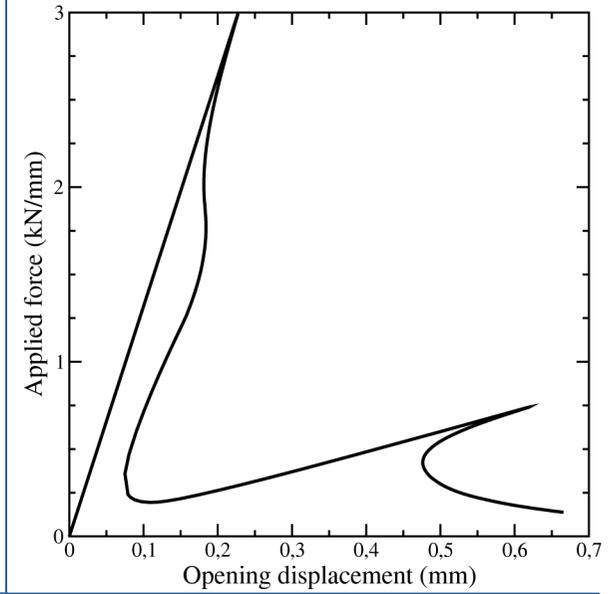
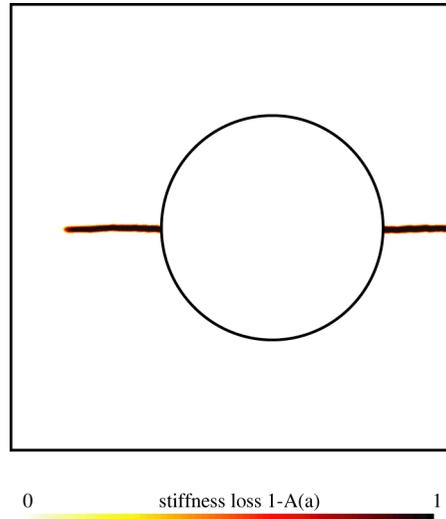
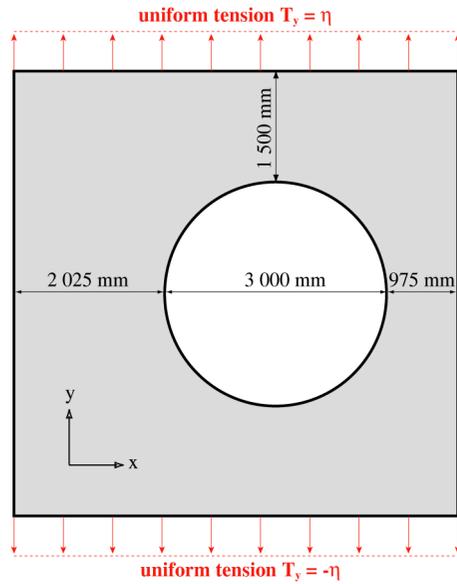
Validation numérique



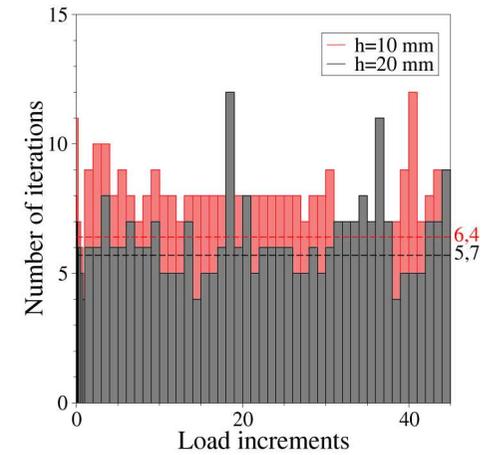
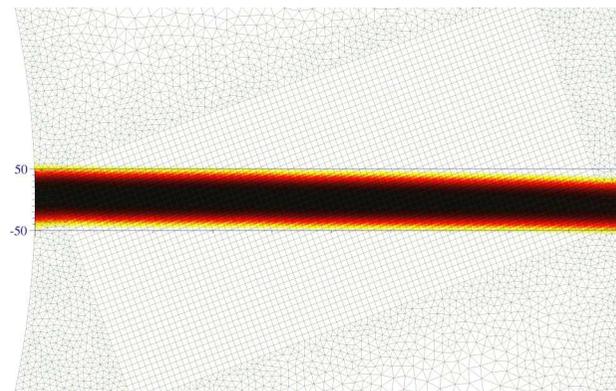
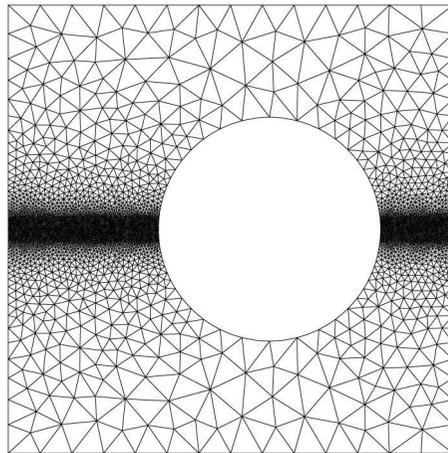
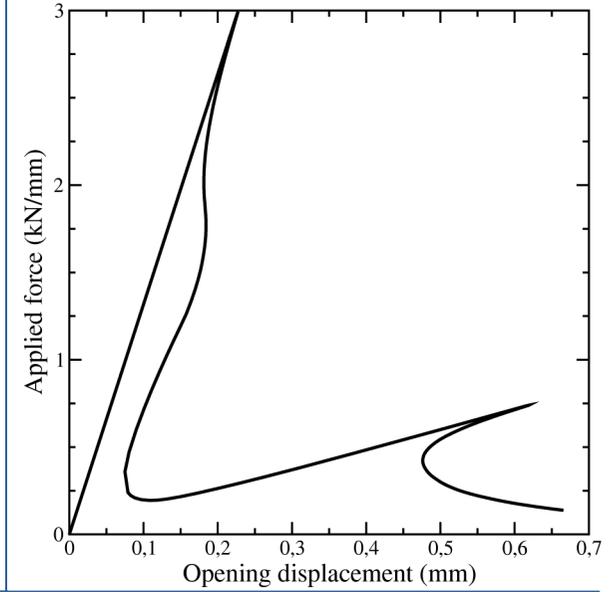
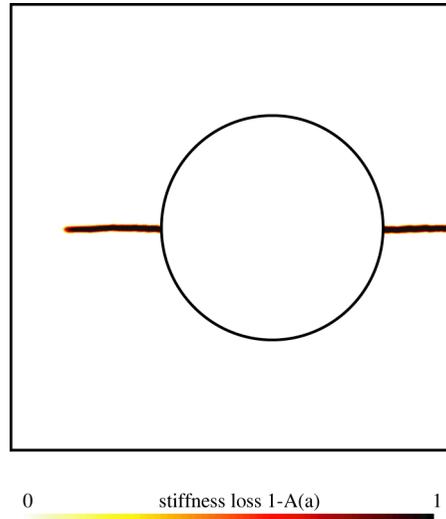
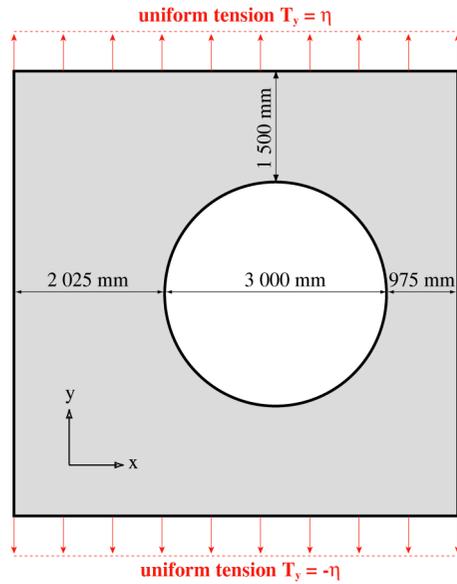
Validation numérique



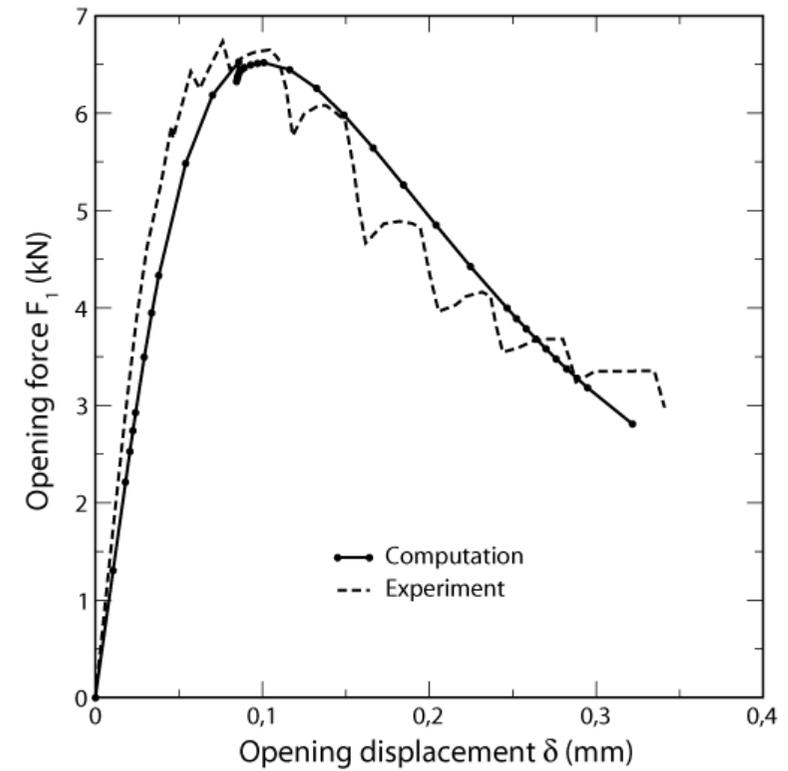
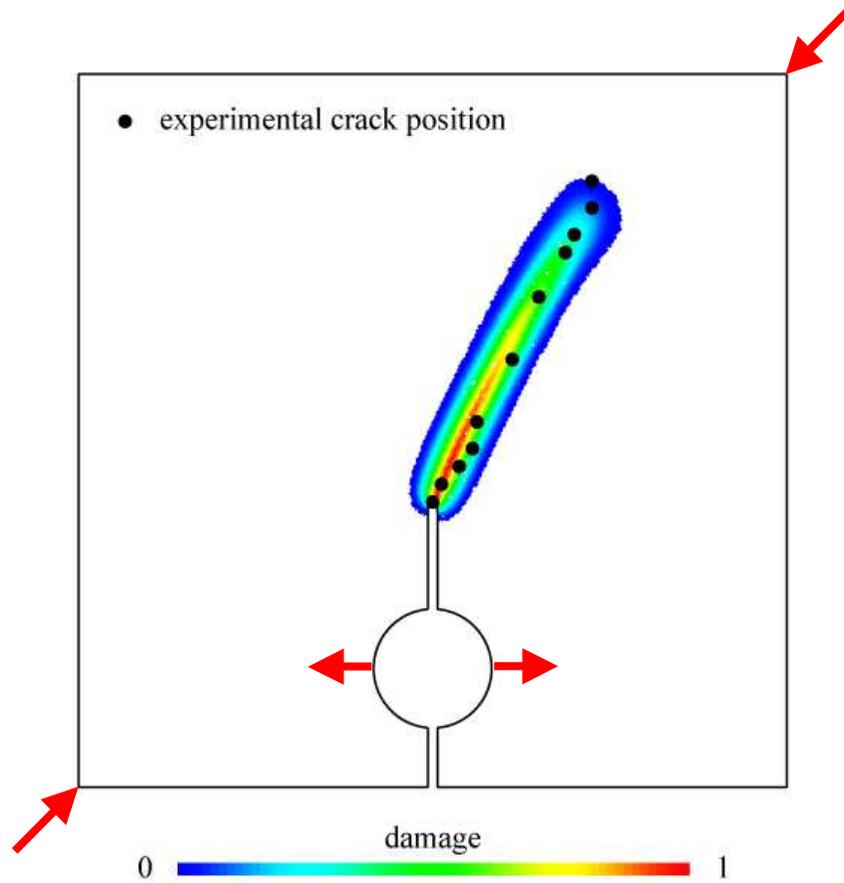
Validation numérique



Validation numérique



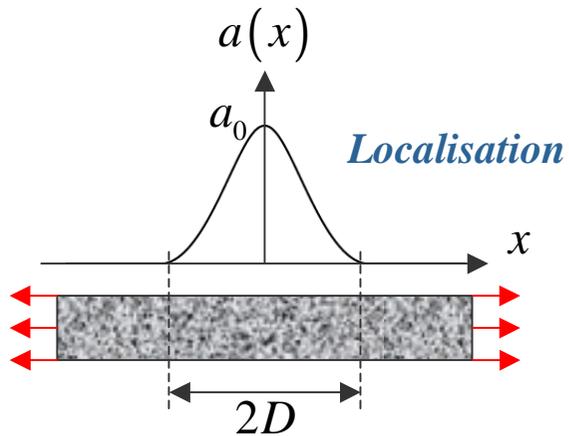
Validation physique



Kobayashi et al. (1984)

*De l'endommagement
à la fissure cohésive*

Problème de la barre en traction

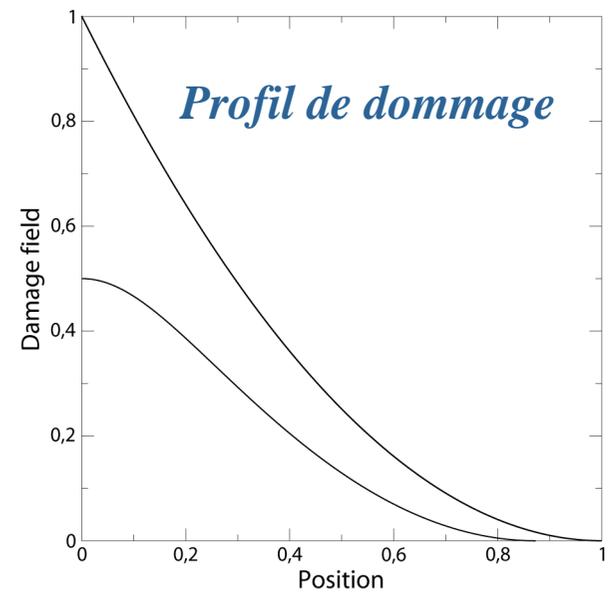
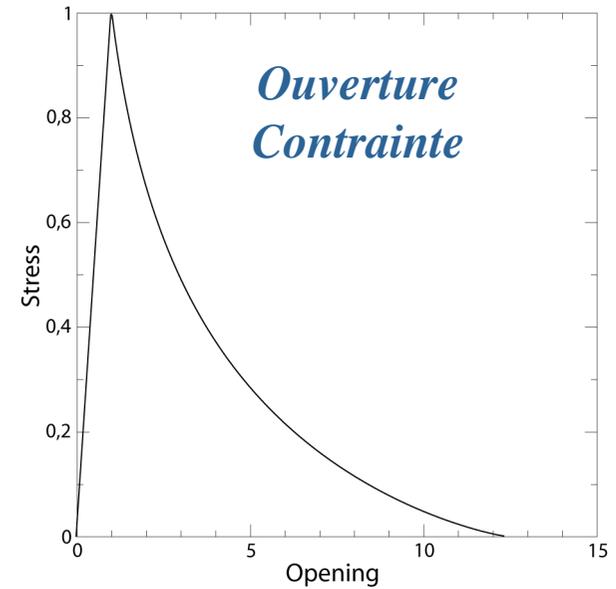
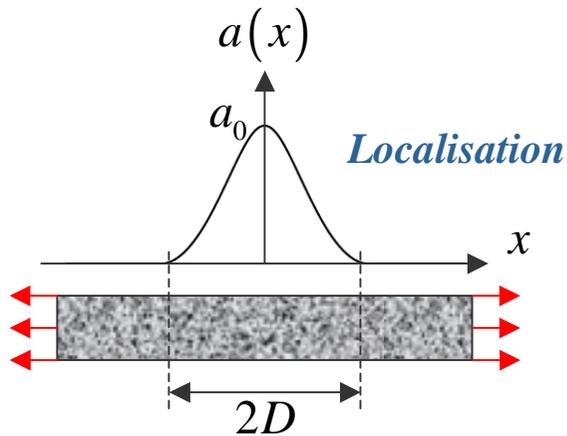


$$\sigma = A(a) E \varepsilon$$

$$f(\varepsilon, a) = -A'(a) \frac{E \varepsilon^2}{2} - k + c \nabla^2 a$$

$$A(a) = \frac{(1-a)^2}{1+(m-2)a+(1+pm)a^2}$$

Problème de la barre en traction



$$\sigma = A(a) E \varepsilon$$

$$f(\varepsilon, a) = -A'(a) \frac{E \varepsilon^2}{2} - k + c \nabla^2 a$$

$$A(a) = \frac{(1-a)^2}{1 + (m-2)a + (1+pm)a^2}$$

Paramètres macroscopiques

Paramètres internes

$$\sigma = A(a) E \varepsilon$$

$$f(\varepsilon, a) = -A'(a) \frac{E \varepsilon^2}{2} - k + c \nabla^2 a$$

$$A(a) = \frac{(1-a)^2}{1 + (m-2)a + (1+pm)a^2}$$

Paramètres macroscopiques

Paramètres internes

$$\sigma = A(a) E \varepsilon$$

$$f(\varepsilon, a) = -A'(a) \frac{E \varepsilon^2}{2} - k + c \nabla^2 a$$

$$A(a) = \frac{(1-a)^2}{1 + (m-2)a + (1+pm)a^2}$$

Paramètres macroscopiques

Longueur interne $D = \sqrt{\frac{2c}{k}}$

Paramètres macroscopiques

Paramètres internes

$$\sigma = A(a) E \varepsilon$$

$$f(\varepsilon, a) = -A'(a) \frac{E \varepsilon^2}{2} - k + c \nabla^2 a$$

$$A(a) = \frac{(1-a)^2}{1 + (m-2)a + (1+pm)a^2}$$

Paramètres macroscopiques

Longueur interne $D = \sqrt{\frac{2c}{k}}$

Module de Young E

Energie de fissuration $G_f = \frac{4}{3} k D$

Contrainte critique $\sigma_y = \sqrt{\frac{3 E G_f}{2 m D}}$

Ouverture critique $\delta_c = \frac{3\pi G_f}{4 \sigma_y} \sqrt{p+1}$

Normalisation et passage à la limite

Normalisation

Passage à la limite

Normalisation et passage à la limite

Normalisation

$$a(a_0, x) = \bar{a} \left(a_0, \frac{x}{D} \right)$$

Passage à la limite

Le profil d'endommagement est homothétique avec D

Normalisation et passage à la limite

Normalisation

$$a(a_0, x) = \bar{a}\left(a_0, \frac{x}{D}\right)$$

$$\delta(a_0) = \frac{G_f}{\sigma_y} \bar{\delta}(a_0) + 2D \frac{\sigma_y}{E} \bar{\sigma}(a_0)$$

Passage à la limite

Le profil d'endommagement est homothétique avec D

Le terme "d'allongement élastique" tend vers zéro

Normalisation et passage à la limite

Normalisation

$$a(a_0, x) = \bar{a}\left(a_0, \frac{x}{D}\right)$$

$$\delta(a_0) = \frac{G_f}{\sigma_y} \bar{\delta}(a_0) + 2D \frac{\sigma_y}{E} \bar{\sigma}(a_0)$$

$$\sigma(a_0) = \sigma_y \bar{\sigma}(a_0)$$

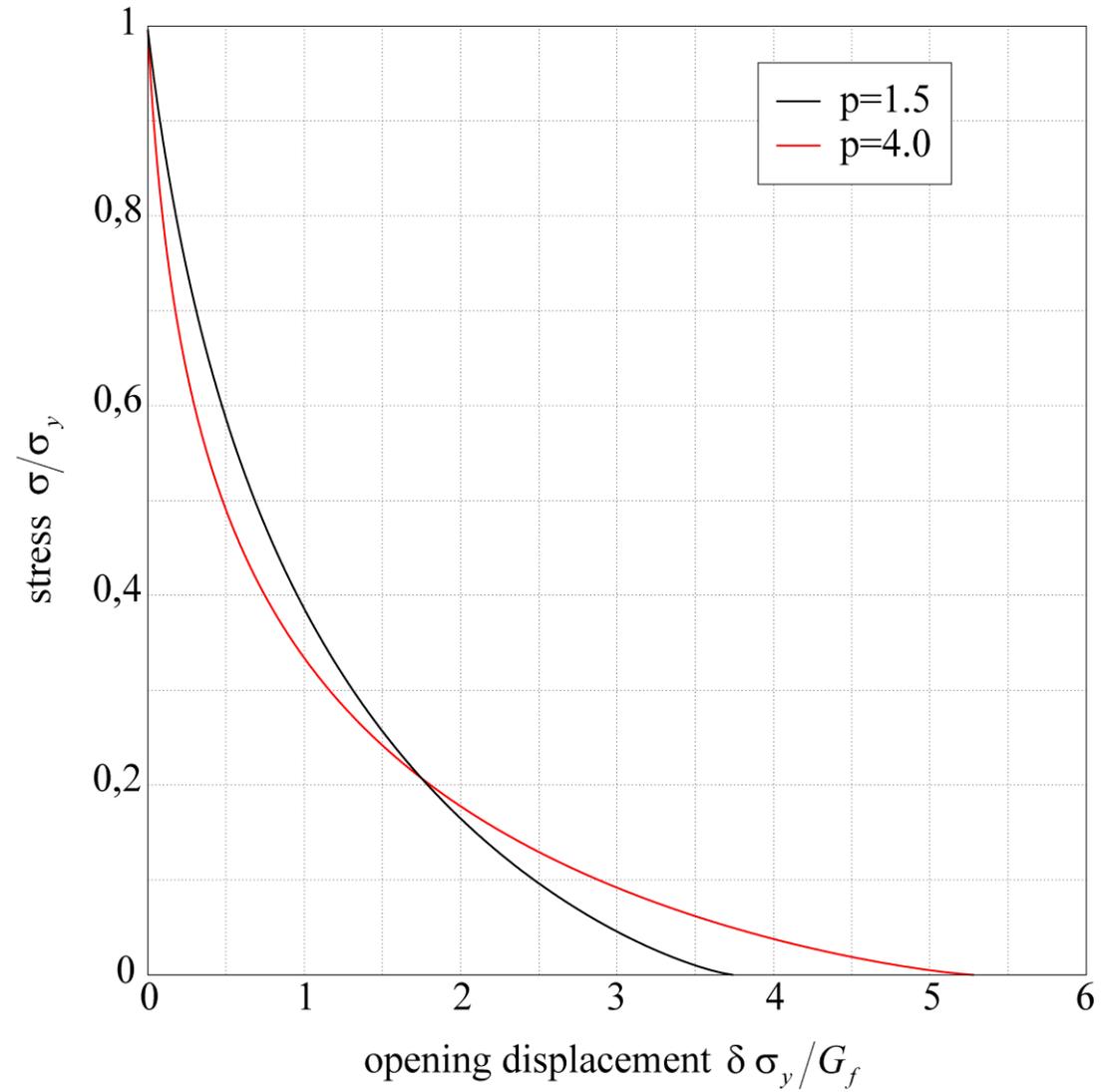
Passage à la limite

Le profil d'endommagement est homothétique avec D

Le terme "d'allongement élastique" tend vers zéro

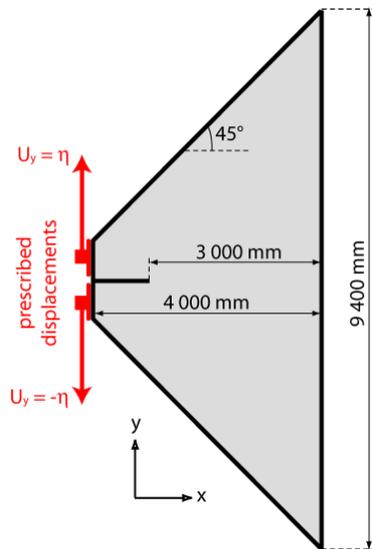
La réponse en contrainte est invariante

Modèle cohésif asymptotique



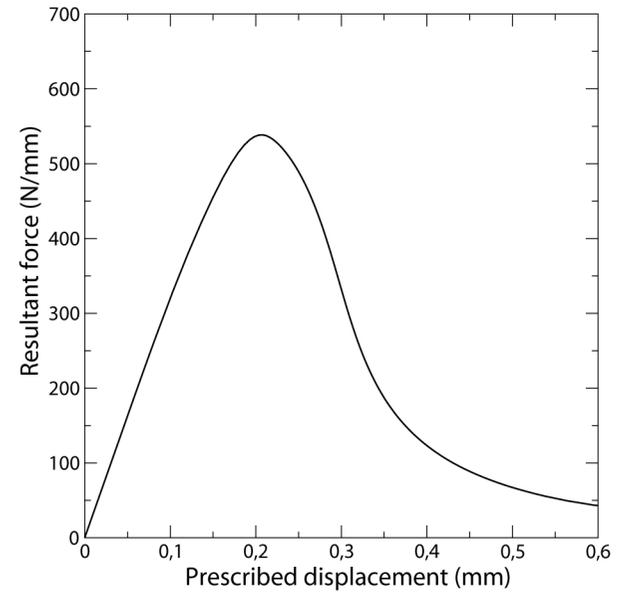
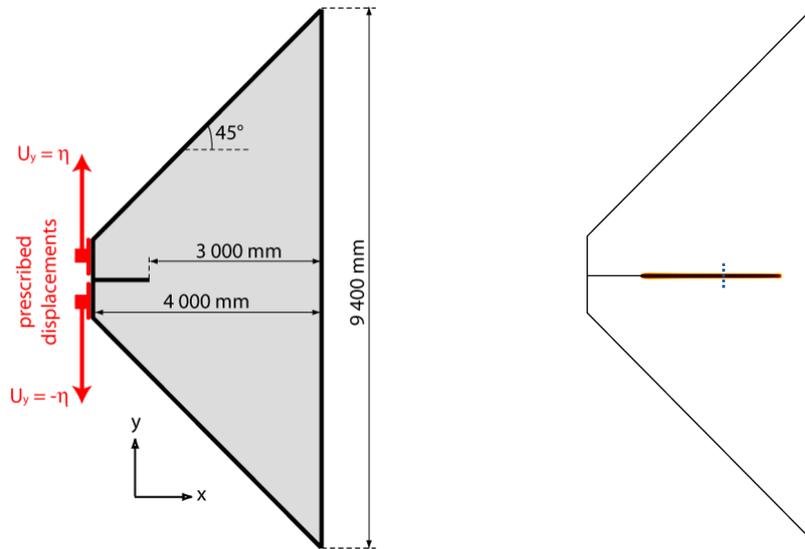
Comparaisons numériques en 2D

Eprouvette virtuelle “DCB élargie”



$E = 30\,000 \text{ MPa}$	$\sigma_y = 3 \text{ MPa}$
$\nu = 0.2$	$G_f = 0.1 \text{ N/mm}$
$2D = 100 \text{ mm}$	$\delta_c = 0.12 \text{ mm}$

Eprouvette virtuelle "DCB élargie"

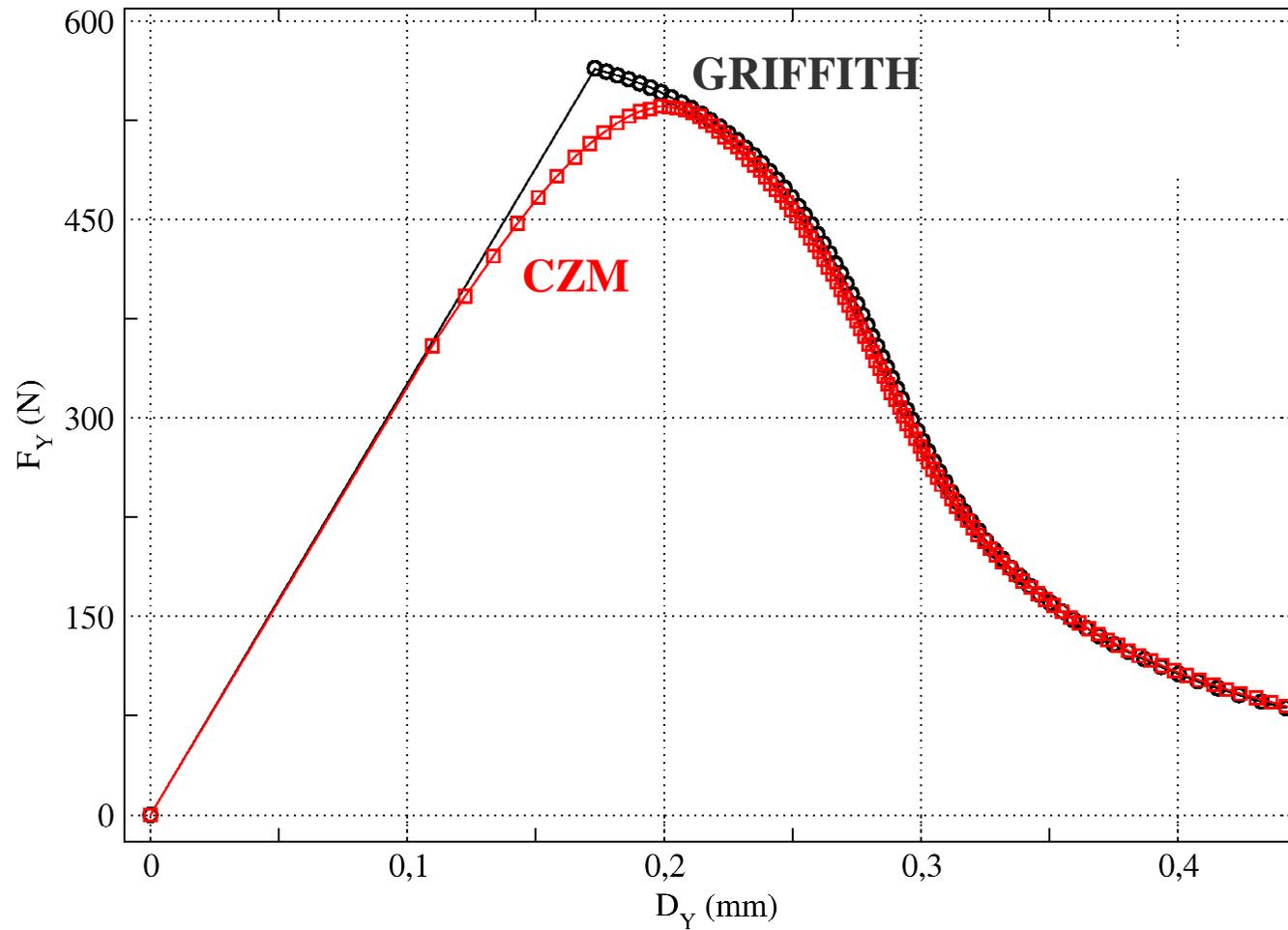


$E = 30\,000\text{ MPa}$	$\sigma_y = 3\text{ MPa}$
$\nu = 0.2$	$G_f = 0.1\text{ N/mm}$
$2D = 100\text{ mm}$	$\delta_c = 0.12\text{ mm}$

*Réponse rectiligne
sans snap-backs*

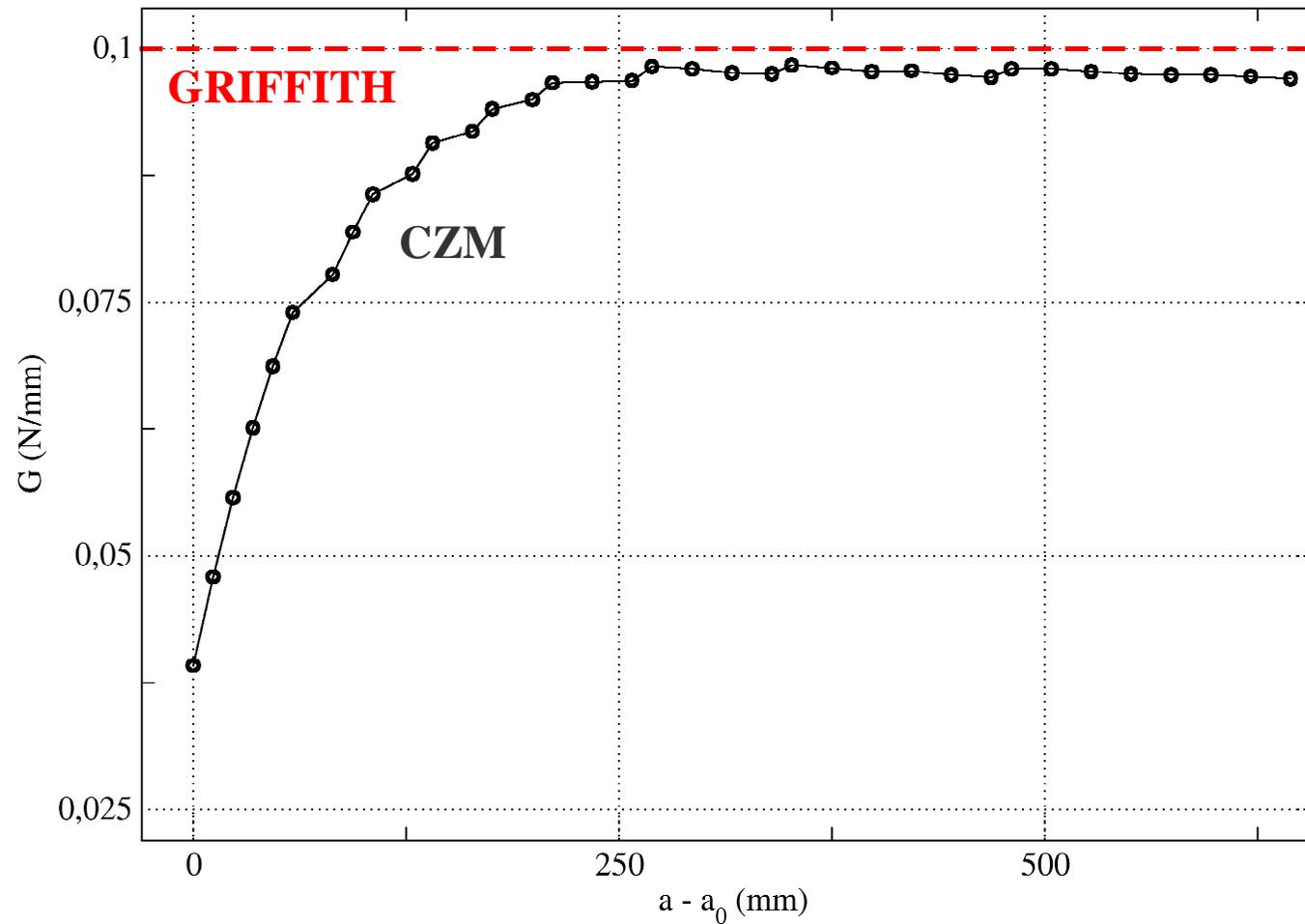
Comparaison Griffith / fissure cohésive (1/2)

Force - déplacement



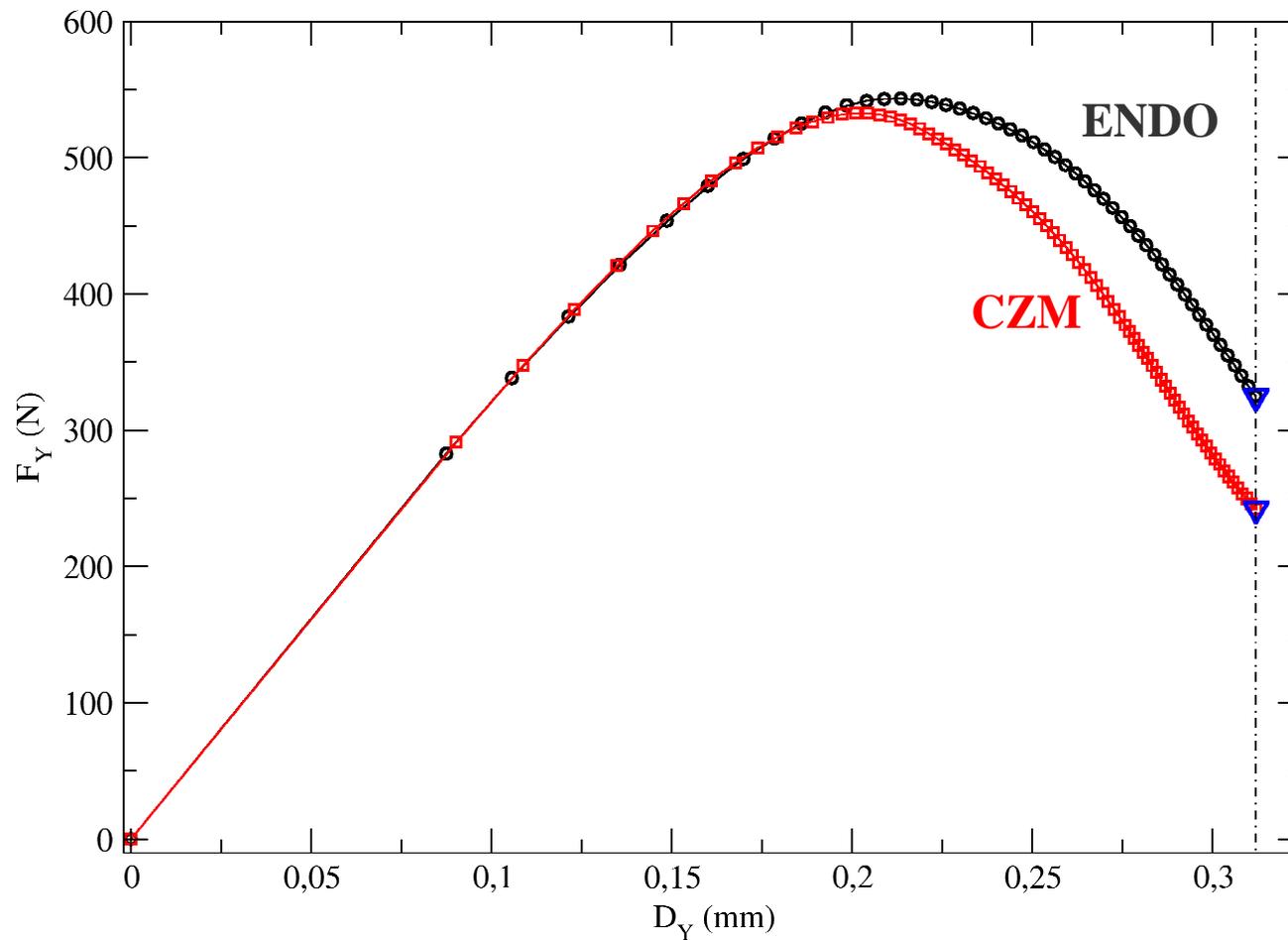
Comparaison Griffith / fissure cohésive (2/2)

Courbe de résistance (R – curve)



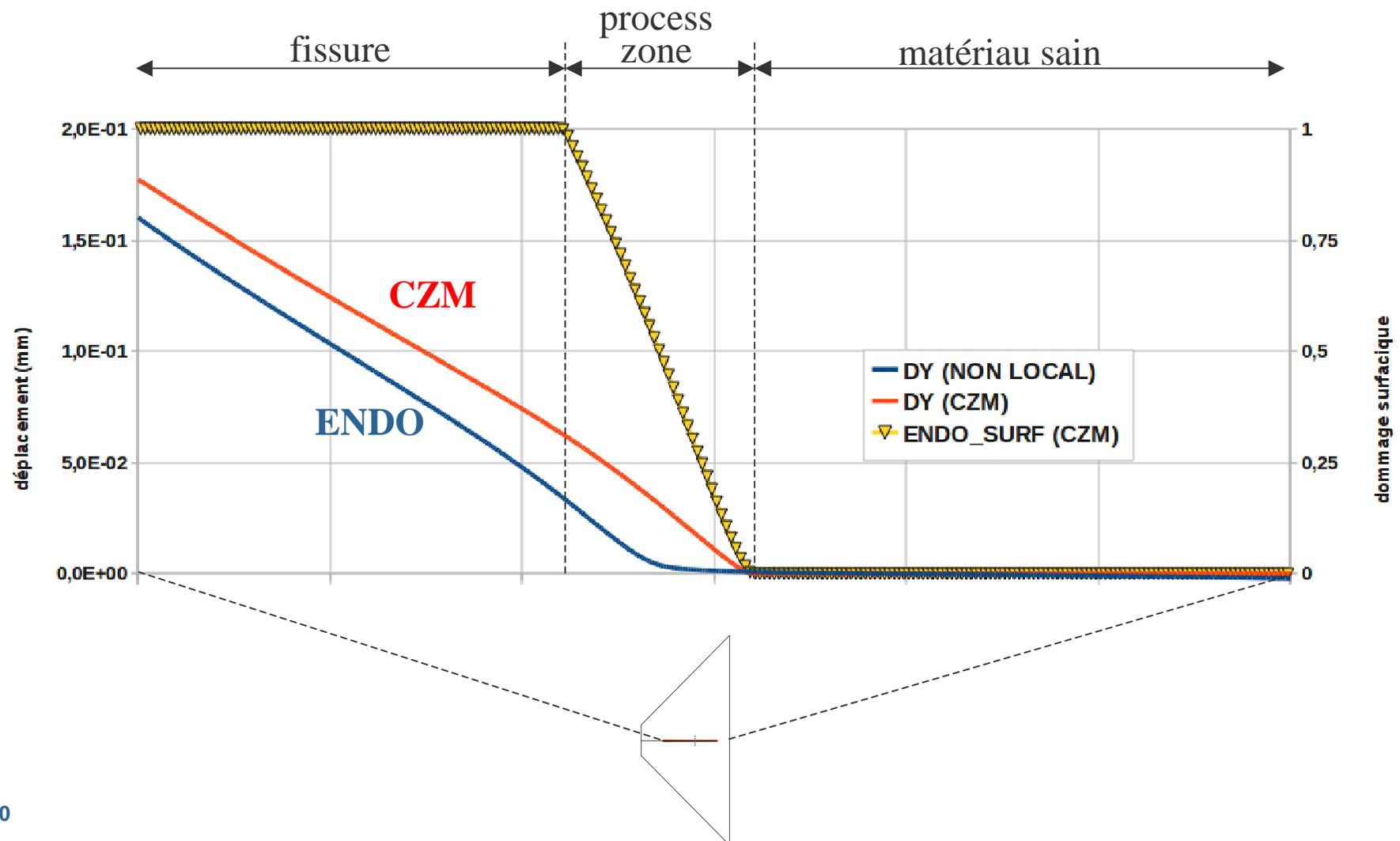
Comparaison fissure cohésive / endommagement (1/2)

Force - déplacement



Comparaison fissure cohésive / endommagement (2/2)

Déplacement d'ouverture le long de la fissure



Conclusion

Acquis

Simulation de la fissuration et du débit de fuite

- Capacité à simuler des structures de grande taille
- Acquisition de l'ouverture de fissure sans traitement particulier

Cadre de cohérence des formulations de la rupture

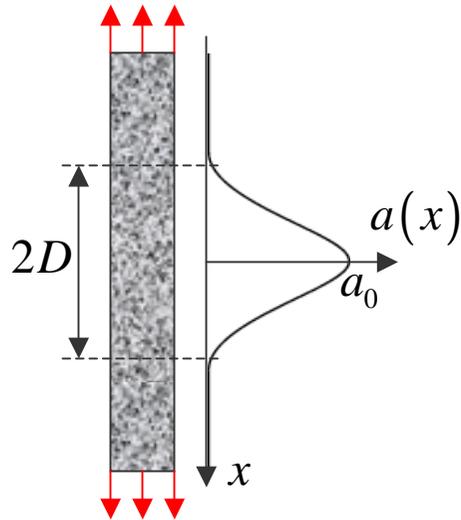
- Paramétrisation cohérente des modèles
- Construction d'un modèle CZM asymptotique (1D)
- Cohérence approchée en 2D : G / CZM / CDM

Perspectives

- Vérifier numériquement la convergence ($D \rightarrow 0$)
- Démonstration analytique de convergence sur l'énergie (?)
- Extension : modes mixtes, refermeture, trajets courbes, 3D

Merci

Problème de la barre en traction



Localisation de l'endommagement

Modèle

$$\sigma = A(a) E \varepsilon$$

$$f(\varepsilon, a) = -A'(a) \frac{E \varepsilon^2}{2} - k + c \nabla^2 a$$

Contrainte – Ouverture

$$\delta(a_0) = \frac{2\sigma(a_0)}{E} \left[D + \int_0^{a_0} (A(a)^{-1} - 1) G(a_0, a)^{-1/2} da \right]$$

$$\sigma(a_0) = \sqrt{\frac{2Ek a_0}{A(a_0)^{-1} - 1}}$$

Profil d'endommagement

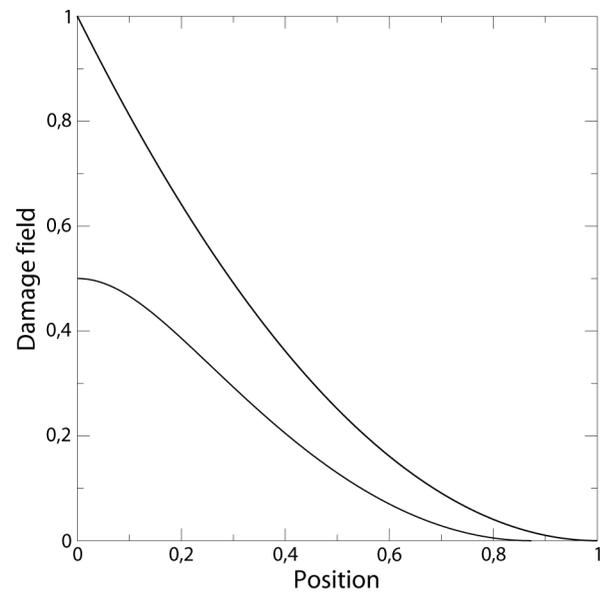
$$x(a_0, a) = \int_a^{a_0} G(a_0, s)^{-1/2} ds$$

$$a_u(x) = \left(1 - \frac{x}{D} \right)^2 \quad \text{avec} \quad D = \sqrt{\frac{2c}{k}}$$

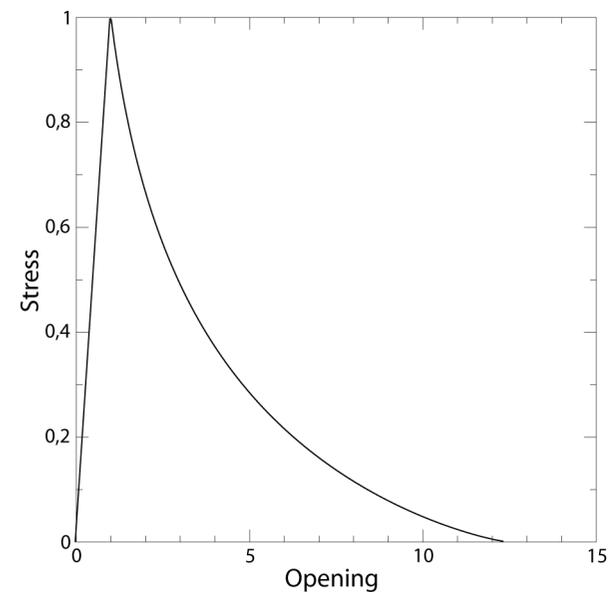
$$G(a_0, a) = \frac{2k a_0}{c} \left[\frac{a}{a_0} - \frac{A(a)^{-1} - 1}{A(a_0)^{-1} - 1} \right]$$

Réponse de la barre en traction

Profil d'endommagement



Contrainte – Ouverture



$$A(a) = \frac{(1-a)^2}{1+(m-2)a+(1+pm)a^2}$$