

# Quelques points durs au niveau théorique pour les modèles cohésifs

J.-J. Marigo  
(LMS, Ecole Polytechnique)

1. La nécessité d'inclure des critères de sélection de solutions;
2. Les différences fondamentales entre mettre des forces cohésives sur des surfaces pré-définies et envisager d'en mettre n'importe où;
3. Le choix des conditions d'irréversibilité.

non convexité



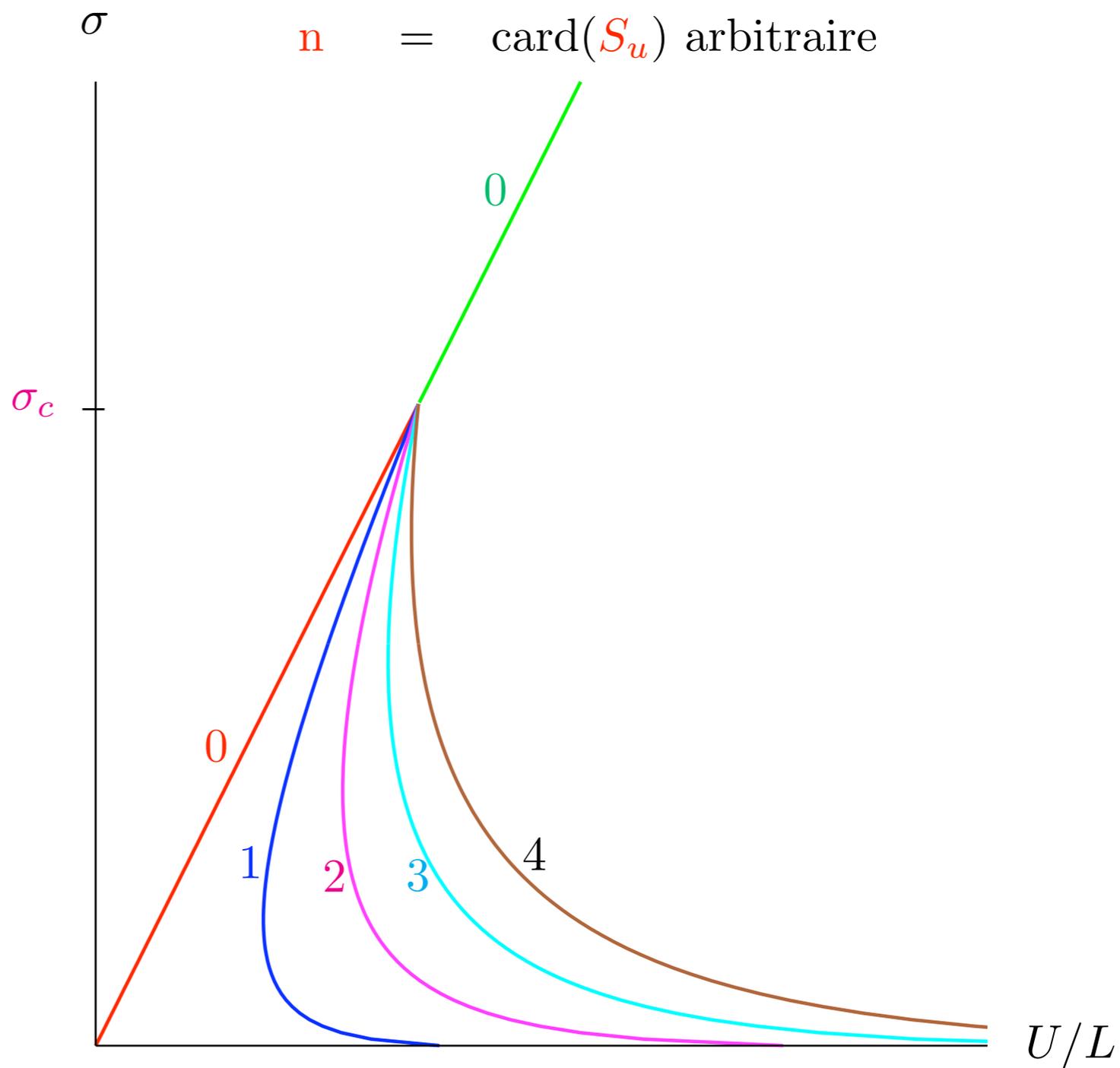
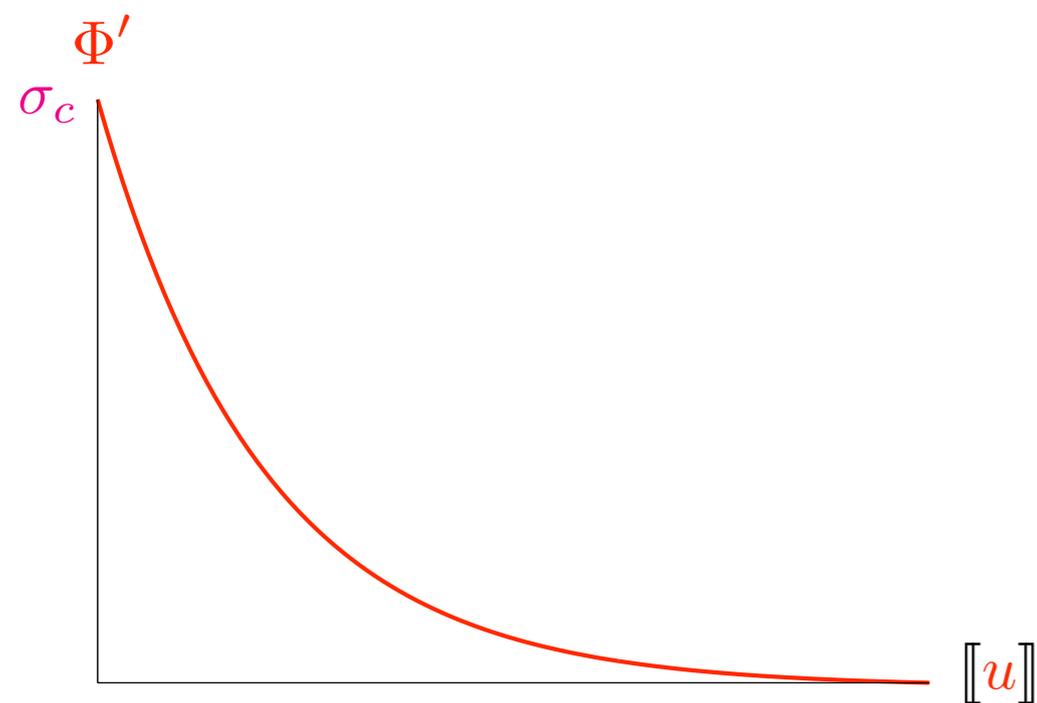
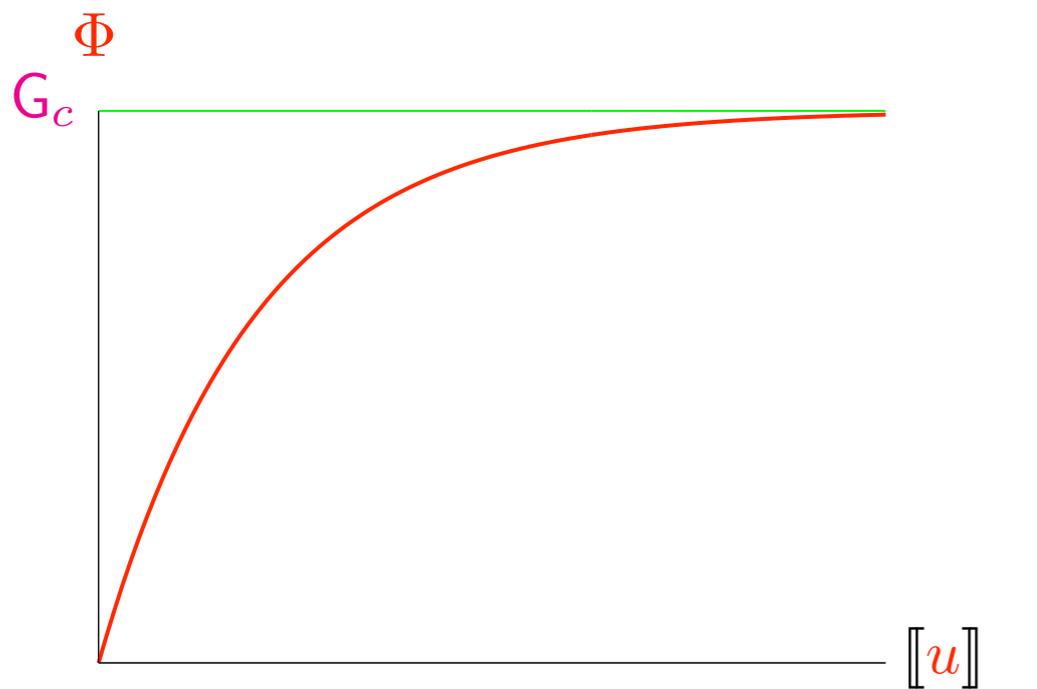
Multiplicité des solutions  
Nécessité d'un critère de sélection



Equilibre :  $\sigma(x) = \sigma$  partout  
 Loi cohésive :  $\Phi'(\llbracket u \rrbracket) = \sigma$  sur  $S_u$

CL :  $\frac{U}{L} = \frac{\sigma}{E} + n \frac{\Phi'^{-1}(\sigma)}{L}$

$n = \text{card}(S_u)$  arbitraire



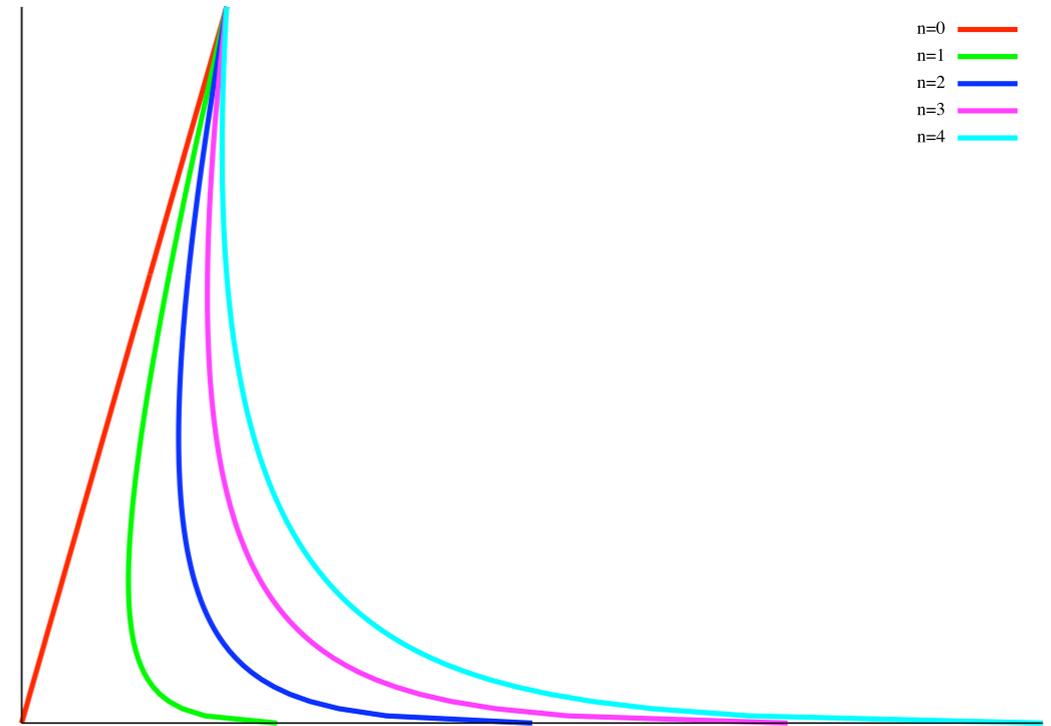
$$\mathcal{E}(v) = \int_0^L \frac{E}{2} v'(x)^2 dx + \sum_{S_v} \Phi([v])$$

$$\mathcal{E}(u + h\varphi) = \mathcal{E}(u) + h\mathcal{G}(u, \varphi) + h^2\mathcal{H}(u, \varphi) + \dots$$

”Stationnarité”  
 $\mathcal{G}(u, \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi$



- Equilibre
- Loi Cohésive
- $\sigma \leq \sigma_c$  dans  $[0, L] \setminus S_u$



n=0  
n=1  
n=2  
n=3  
n=4

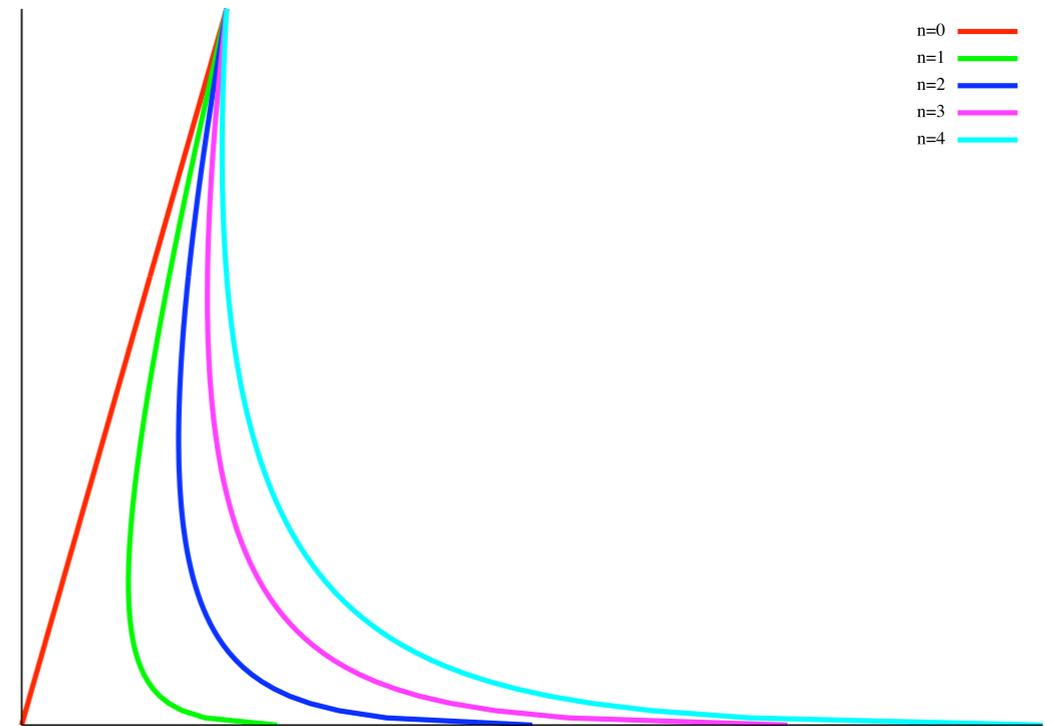
$$\mathcal{E}(v) = \int_0^L \frac{E}{2} v'(x)^2 dx + \sum_{S_v} \Phi([v])$$

$$\mathcal{E}(u + h\varphi) = \mathcal{E}(u) + h\mathcal{G}(u, \varphi) + h^2\mathcal{H}(u, \varphi) + \dots$$

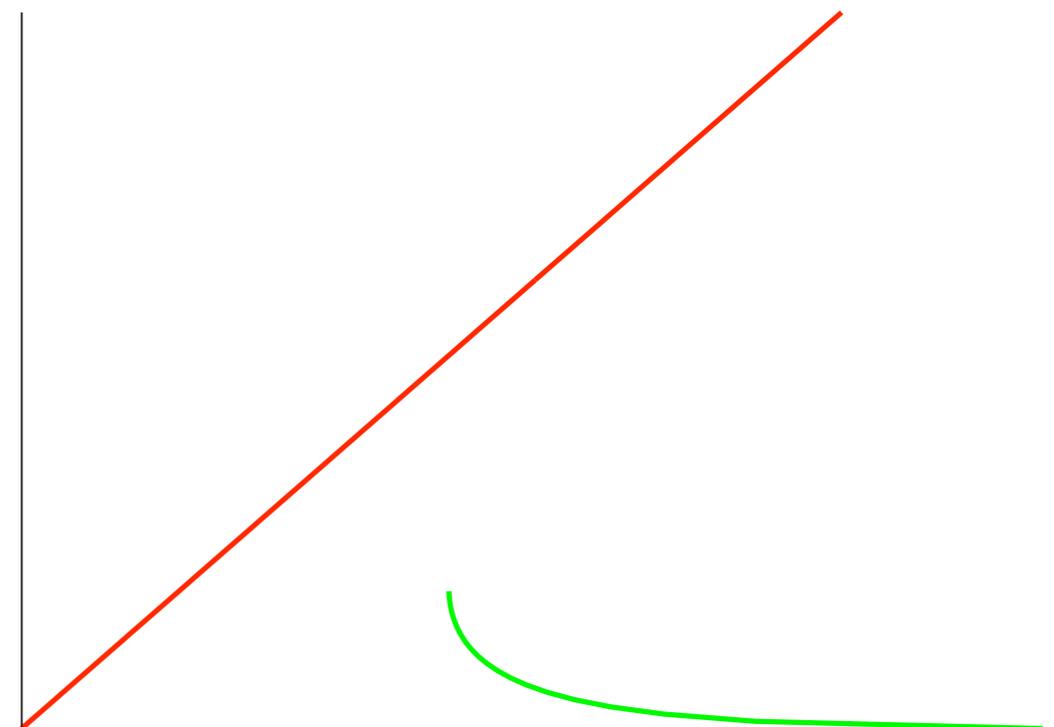
”Stationnarité”  
 $\mathcal{G}(u, \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi$

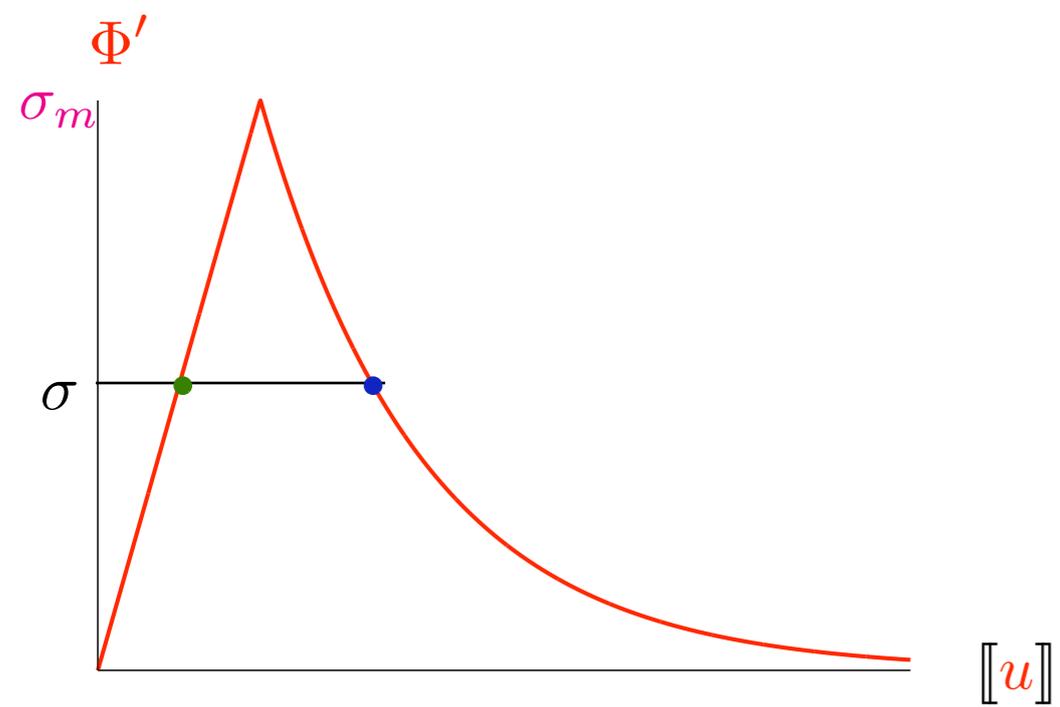
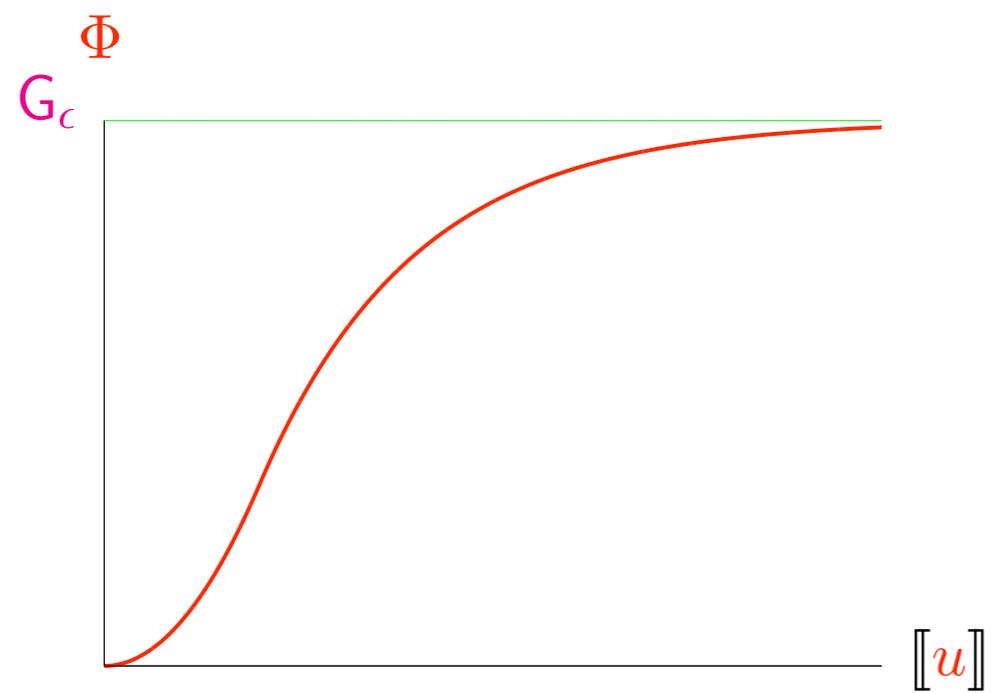


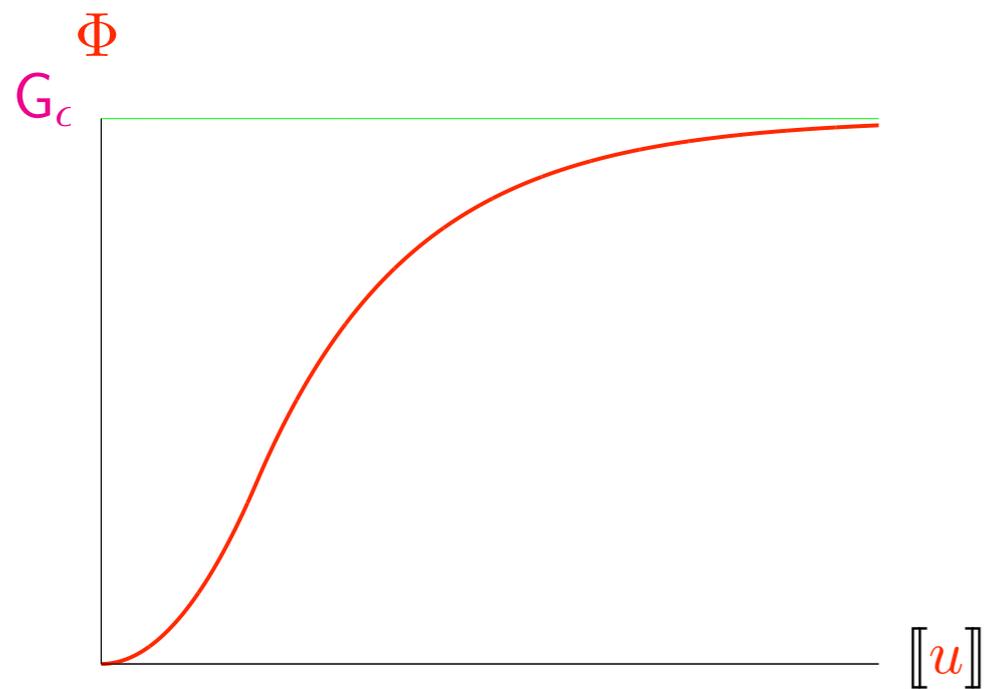
- Equilibre
- Loi Cohésive
- $\sigma \leq \sigma_c$  dans  $[0, L] \setminus S_u$



Minimum Local  $\implies n = 0$  ou  $1$



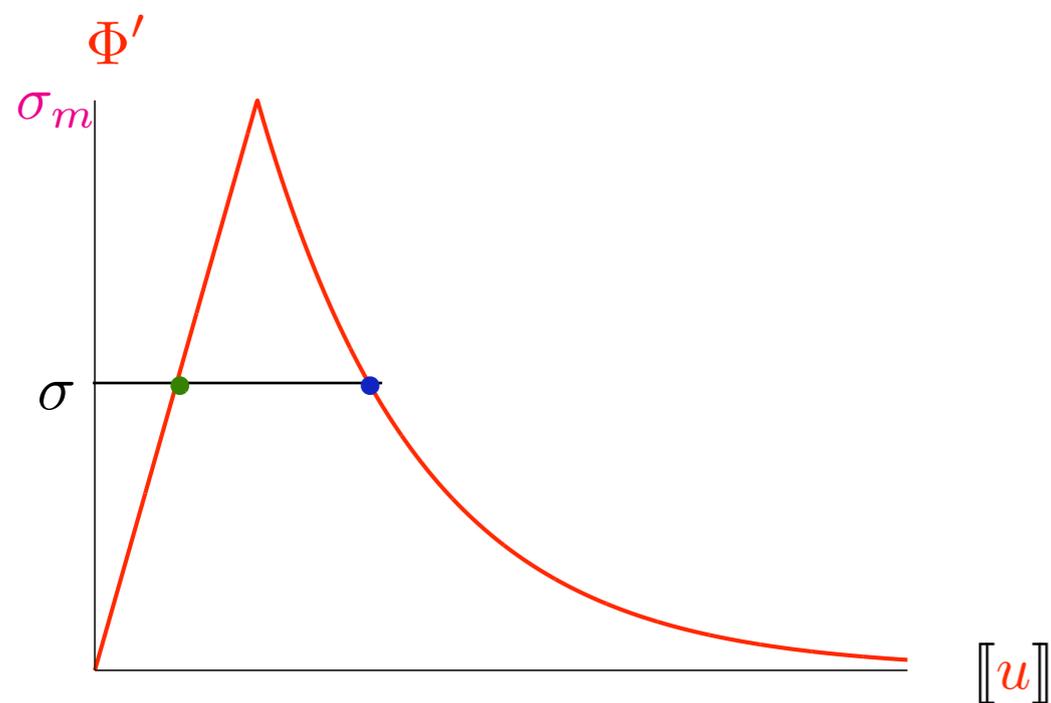


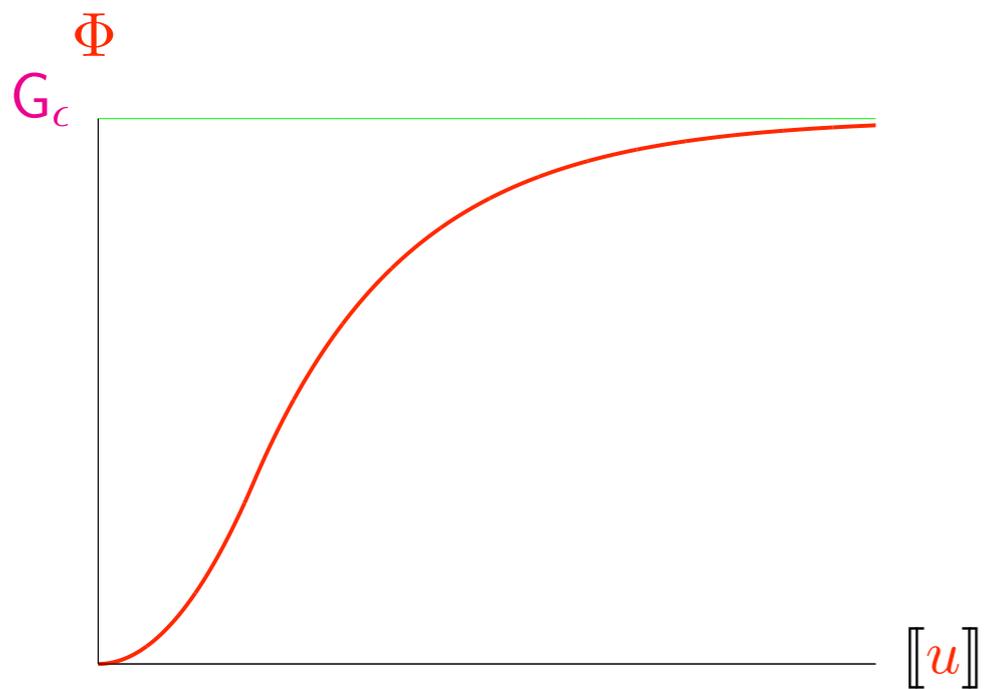


Equilibre :  $\sigma(x) = \sigma$  partout  
 Loi cohésive :  $\Phi'([[u]]) = \sigma$  sur  $S_u$

CL :  $\frac{U}{L} = \frac{\sigma}{E} + n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2$

$n_1$  et  $n_2$  arbitraires

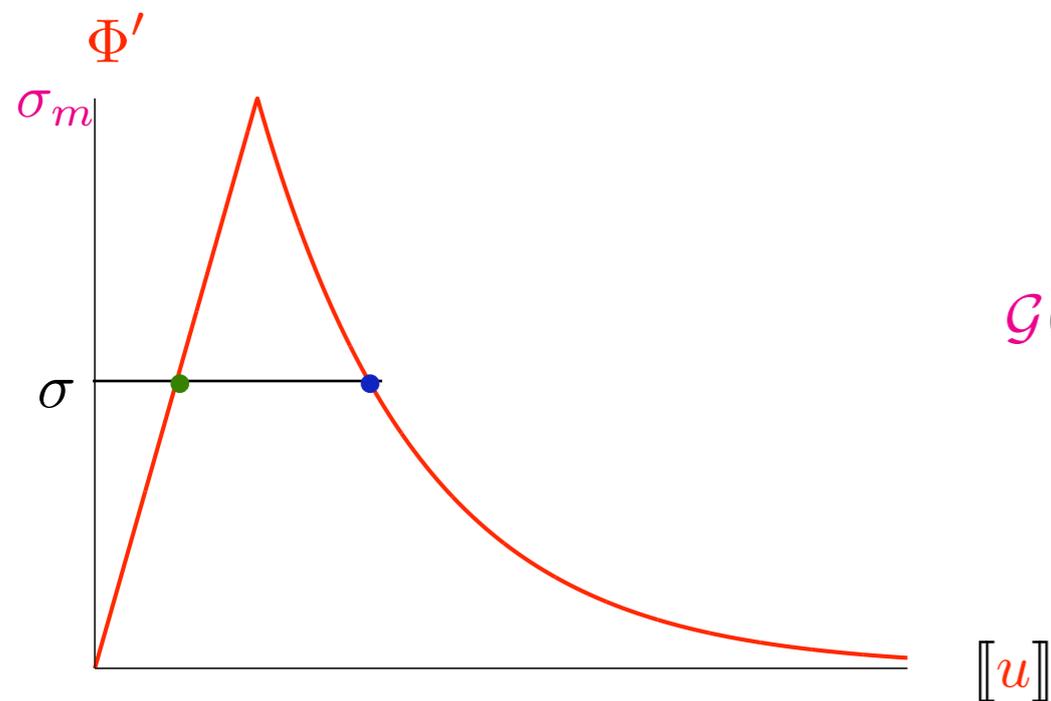




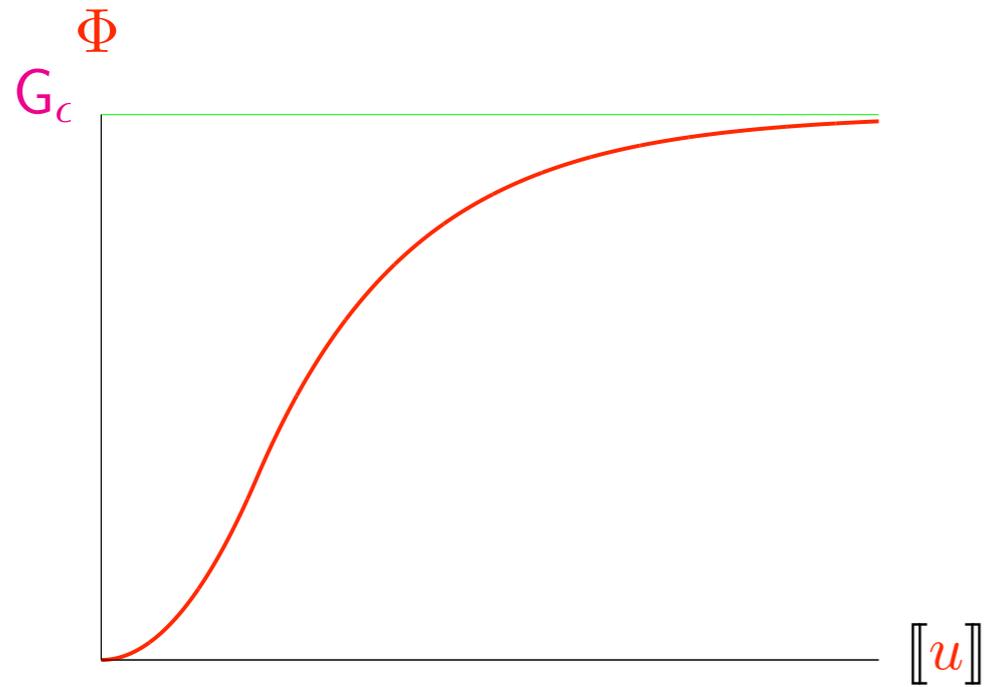
Equilibre :  $\sigma(x) = \sigma$  partout  
 Loi cohésive :  $\Phi'([[u]]) = \sigma$  sur  $S_u$

CL :  $\frac{U}{L} = \frac{\sigma}{E} + n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2$

$n_1$  et  $n_2$  arbitraires



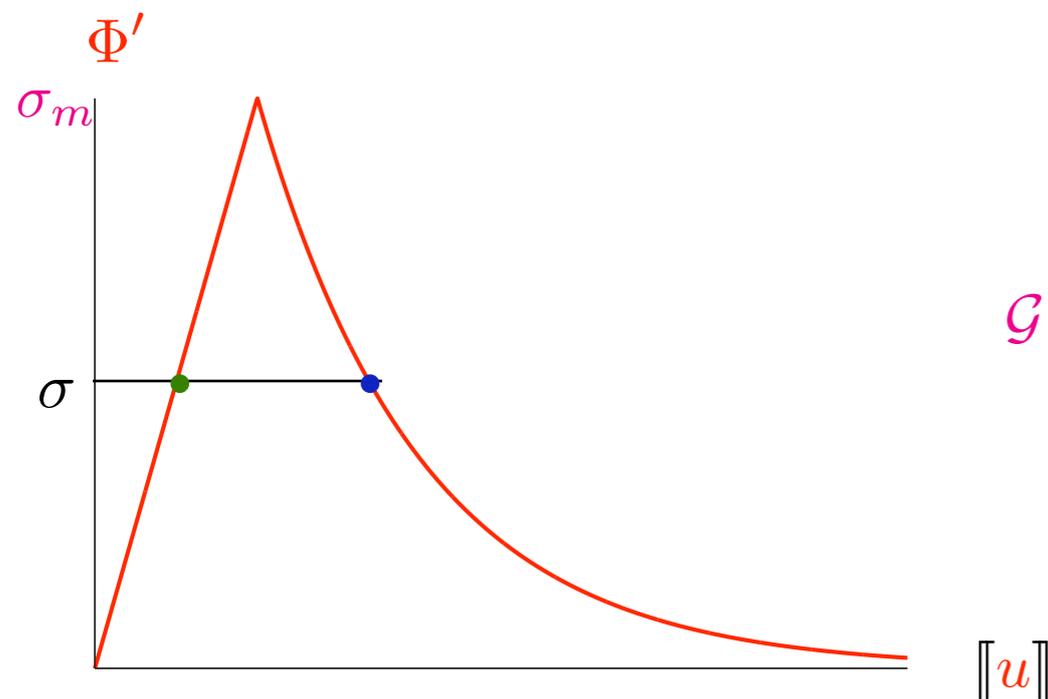
"Stationnarité"  
 $\mathcal{G}(u, \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \implies \sigma \leq \Phi'(0) = 0$  dans  $[0, L] \setminus S_u$



Equilibre :  $\sigma(x) = \sigma$  partout  
 Loi cohésive :  $\Phi'([[u]]) = \sigma$  sur  $S_u$

CL :  $\frac{U}{L} = \frac{\sigma}{E} + n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2$

$n_1$  et  $n_2$  arbitraires

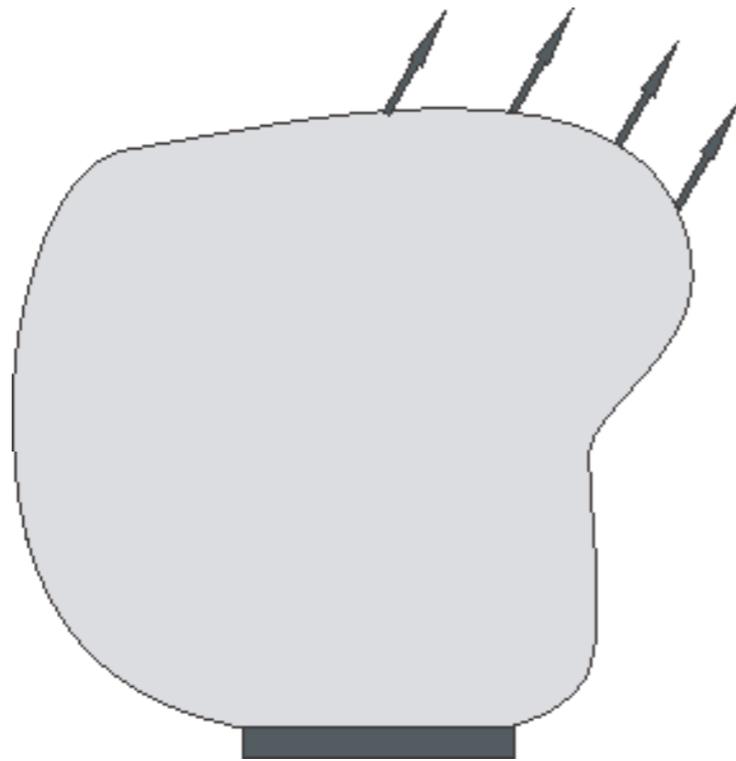


"Stationnarité"  
 $\mathcal{G}(u, \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \implies \sigma \leq \Phi'(0) = 0$  dans  $[0, L] \setminus S_u$

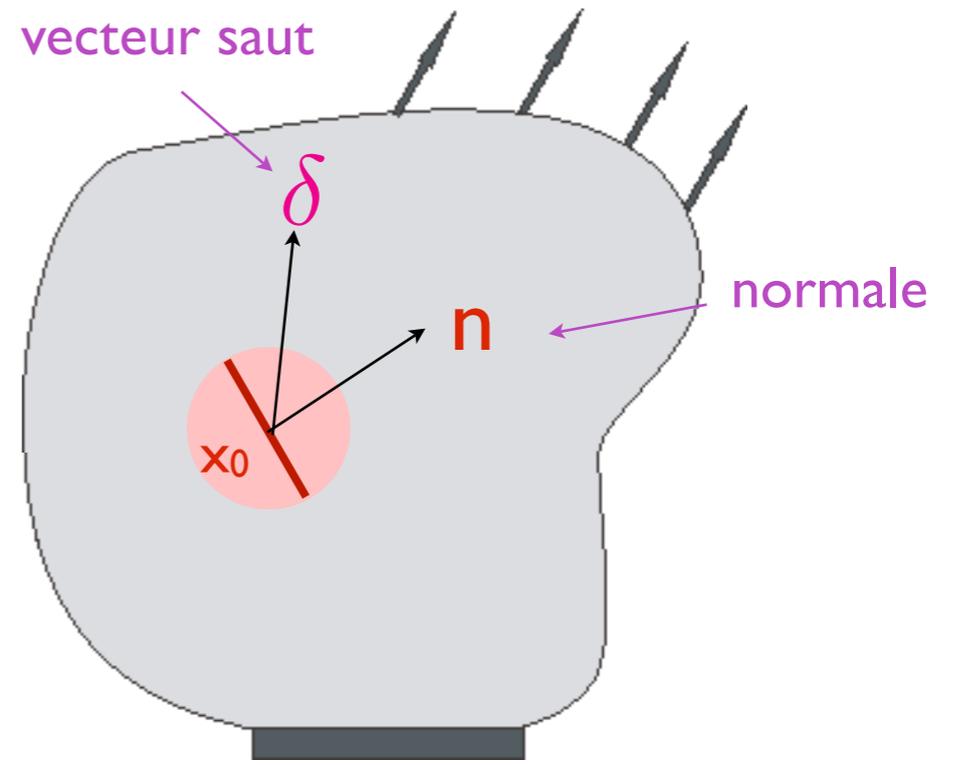
**MAUVAIS MODELES!**

3D

# Initiation = Perte de stabilité de la réponse élastique élastique



$u_0$



$u_h = u_0 + hv$

$$v(x) = H((x - x_0) \cdot n) f(\|x - x_0\|) \delta$$

Non interpénétration :  $\delta \cdot n \geq 0$

$$E(u_h) = E(u_0) + hF(u_0; v) + \dots$$

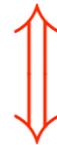
Condition de Stabilité d'ordre 1 :  $F(u_0; v) \geq 0 \quad \forall f \text{ smooth}, \quad \forall x_0, \quad \forall n, \delta : n \cdot \delta \geq 0$

## Hypothèses sur l'énergie de surface

1. **Isotropie**  $\Phi(n, \delta) = \phi\left(\delta \cdot n, \|\delta - \delta \cdot n n\|\right)$
2. **Régularité**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \phi(h\alpha, h\beta) = \varphi(\alpha, \beta)$   
 $\varphi$  positivement homogène

### Condition Nécessaire de Stabilité

$$\sigma_0(x_0) n \cdot \delta \leq \varphi(\delta \cdot n, \|\delta - \delta \cdot n n\|), \quad \forall x_0, \forall n, \forall \delta \quad \delta \cdot n \geq 0$$



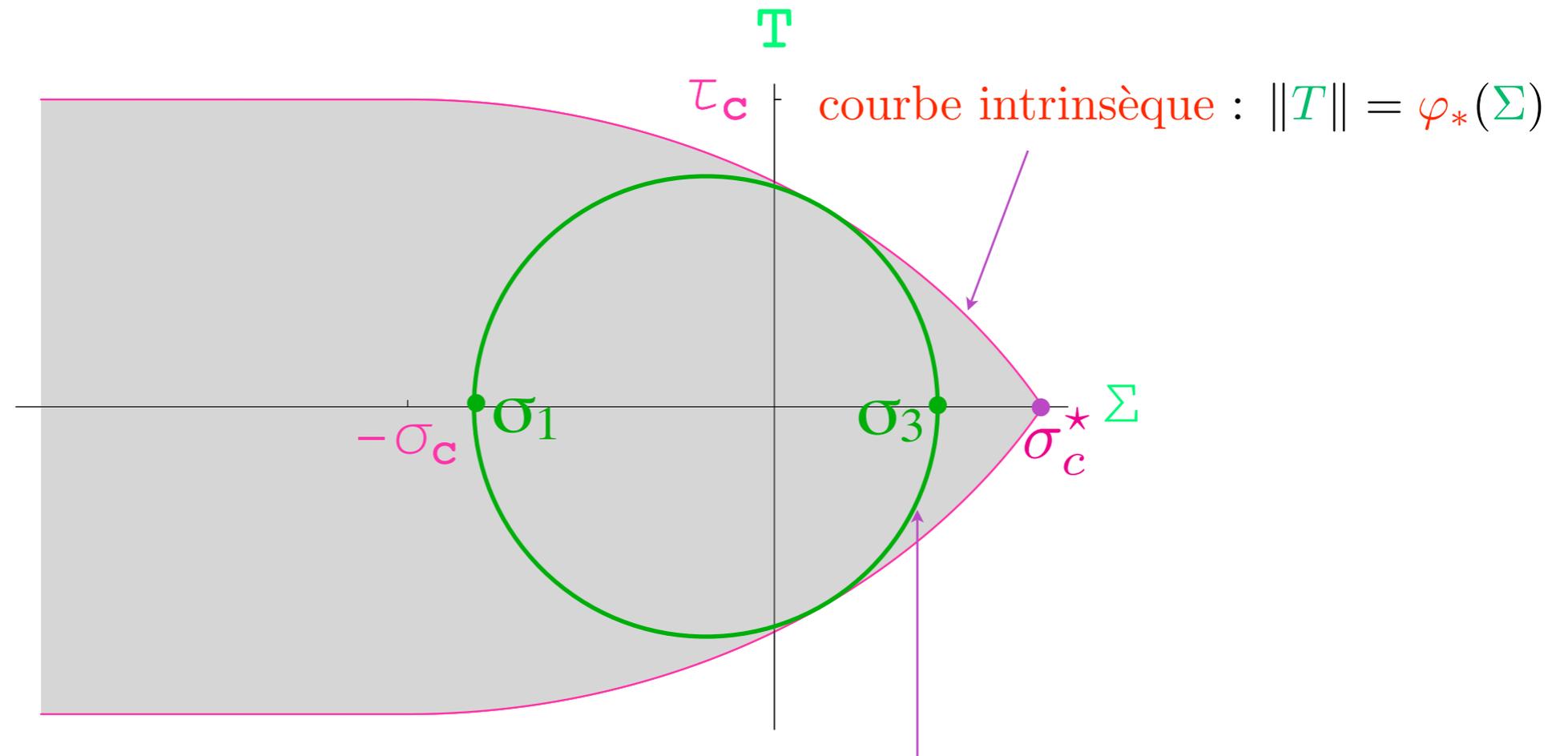
$$\|T\| \leq \varphi_*(\Sigma), \quad \forall n$$

$$\Sigma = \sigma_0 n \cdot n \quad : \quad \text{contrainte normale}$$

$$T = \sigma_0 n - \Sigma n \quad : \quad \text{contrainte tangentielle}$$

$$\varphi_*(\Sigma) = \inf_{\lambda \geq 0} \{\varphi(\lambda, 1) - \lambda \Sigma\}$$

# Critère de Résistance de Mohr-Caquot



$$\sigma_c = \varphi(1, 0)$$

$$\tau_c = \varphi(0, 1)$$

Grand Cercle de Mohr

$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \leq \varphi^* \left( \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)$$

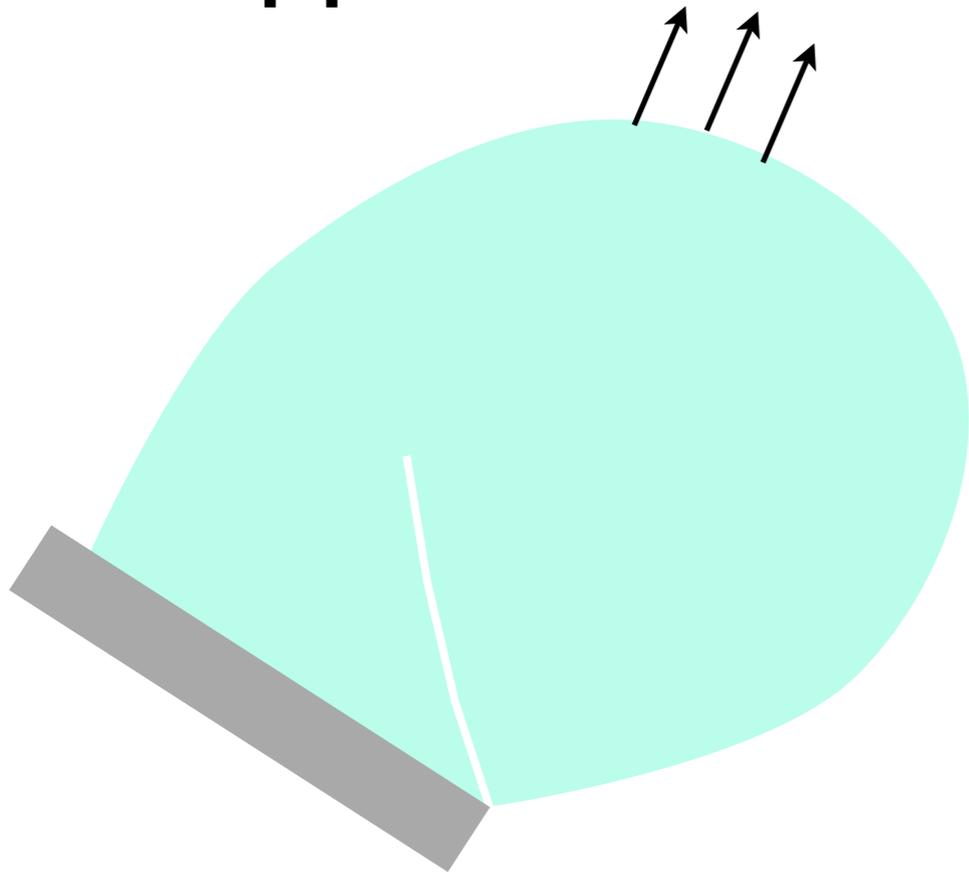
$$\varphi^*(s) := \inf_{\theta \in [0, \pi]} \{ \varphi(\sin \theta, \cos \theta) - s \cos \theta \}$$

CONVEXE, ISOTROPE, NON BORNE, INDEPENDANT de  $\sigma_2$

Condition à vérifier en tout point en dehors de la zone cohésive

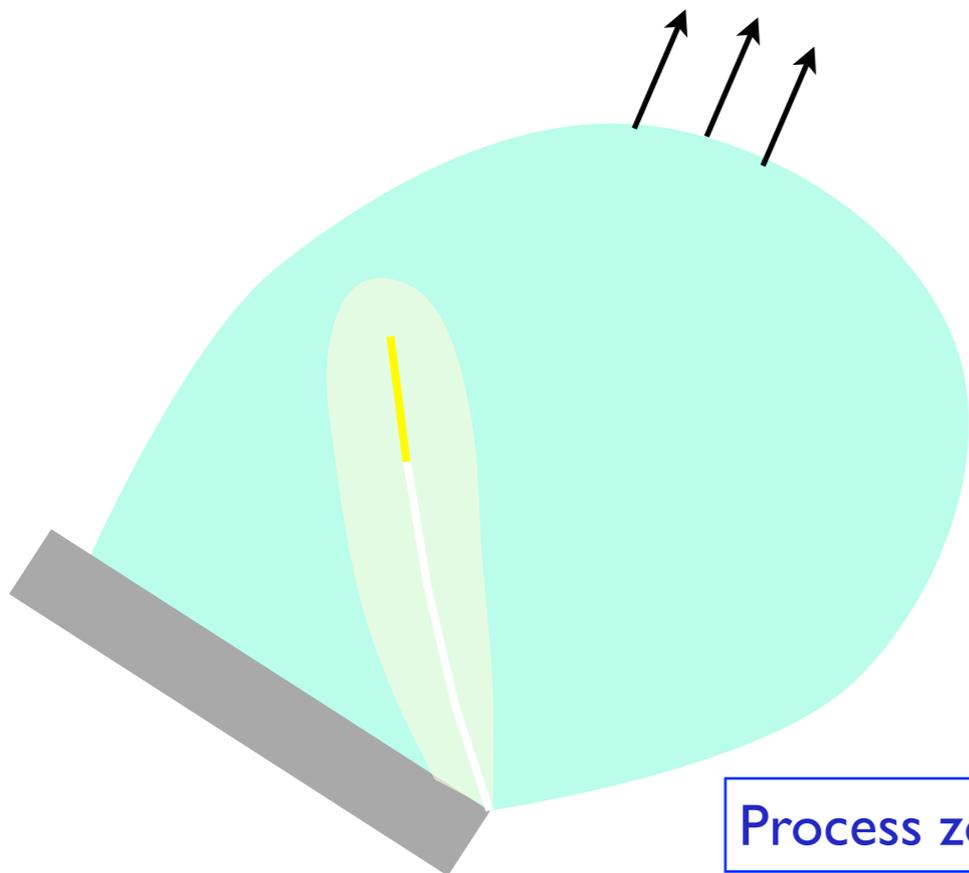
$$\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \leq \varphi^* \left( \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)$$

# ► L'apparition de zones cohésives continues



Cas de l'énergie de Griffith

Existence de solutions "discrètes" stables  
→ Pas de process zone



Cas de l'énergie de Barenblatt

Non existence de solution "discrète" stable  
→ Process zone

Process zone = Mélanges fins de déformation élastique et de microsauts

- Exemple générique montrant qu'il n'y a pas de solution "discrète" stable

## Mode III, Dugdale

dans le domaine élastique

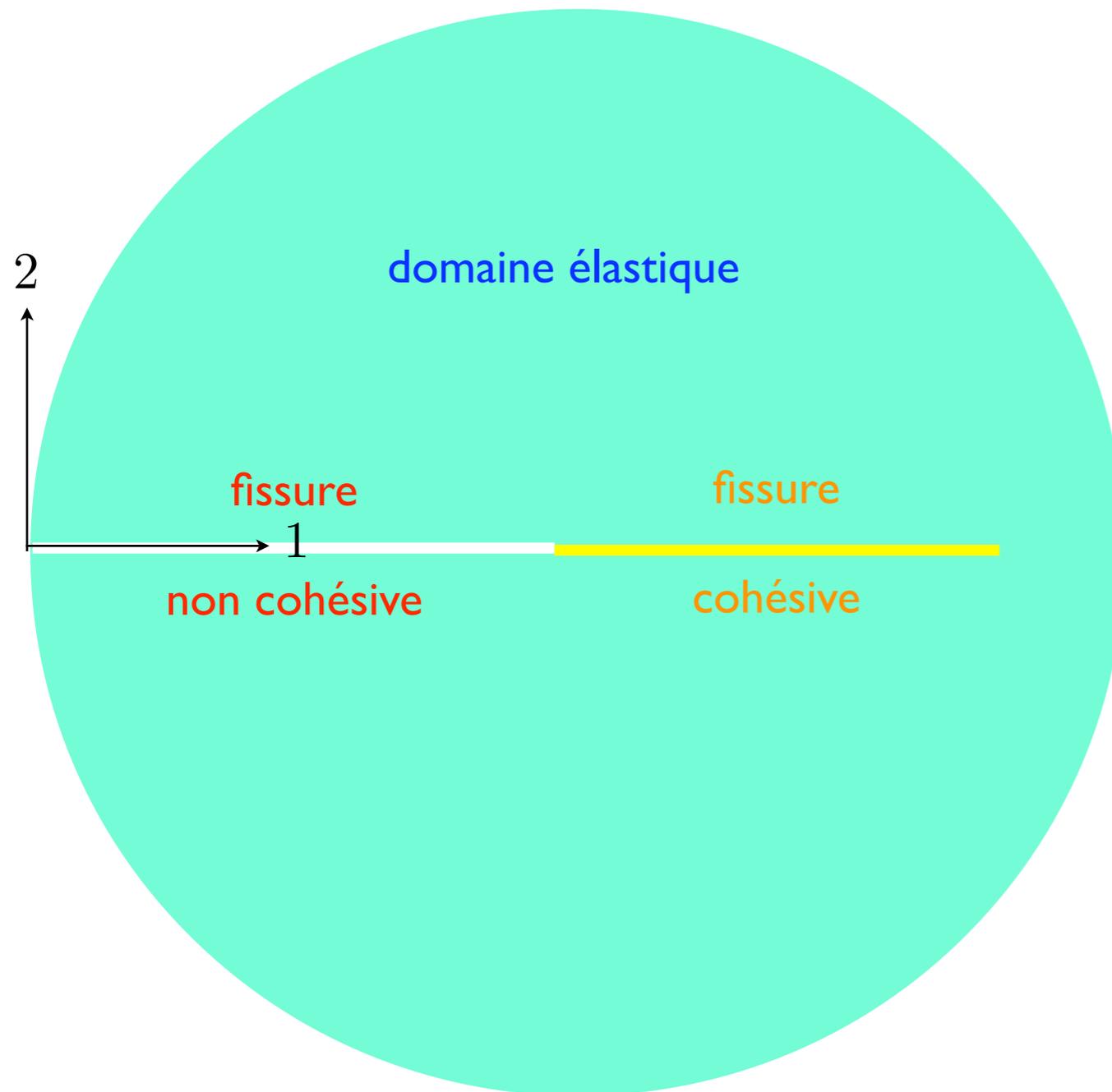
stabilité  $\mu \|\nabla u\| = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} \leq \sigma_c$

sur la fissure cohésive

force cohésive  $\sigma_{32} = \sigma_c$

glissement relatif  $\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} = \sigma_{31} > 0$

$$\mu \|\nabla u\| > \sigma_c$$



- L'énergie de déformation effective

Cube  $Q_h$



$$\text{vol}(Q_h) W_h^{eff}(\bar{\varepsilon}) = \min_{v=\bar{\varepsilon}x \text{ on } \partial Q_h} \left\{ \int_{Q_h \setminus S_v} W(\varepsilon(v)) dx + \int_{S_v} \Phi(n, \llbracket v \rrbracket) dS \right\}$$

Changement d'échelle  $y=x/h$

Cube  $Q_1$



$$W_h^{eff}(\bar{\varepsilon}) = \min_{w=\bar{\varepsilon}y \text{ on } \partial Q_1} \left\{ \int_{Q_1 \setminus S_w} W(\varepsilon(w)) dy + \int_{S_w} \frac{\Phi(n, \llbracket hw \rrbracket)}{h} dS \right\}$$

A la limite  $h \rightarrow 0$

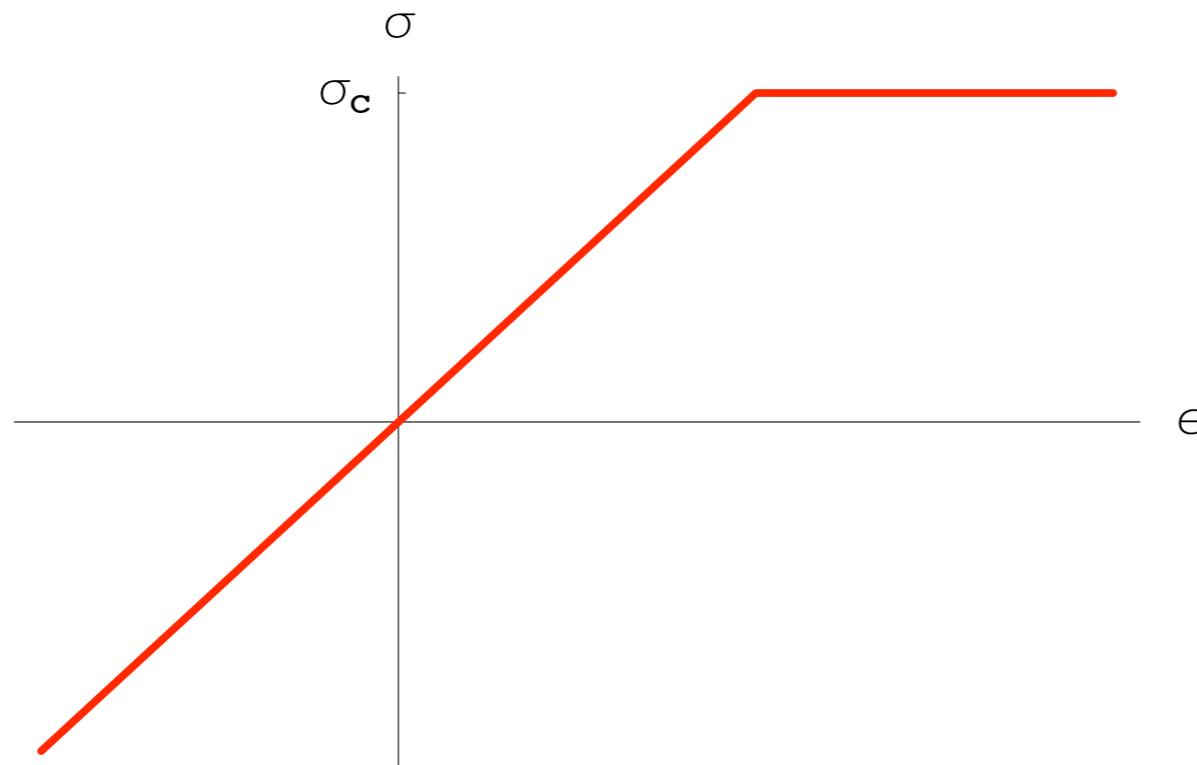
$$W^{eff}(\bar{\varepsilon}) = \min_{w=\bar{\varepsilon}y \text{ on } \partial Q_1} \left\{ \int_{Q_1 \setminus S_w} W(\varepsilon(w)) dy + \int_{S_w} \varphi(\llbracket w_n \rrbracket, \|\llbracket w_t \rrbracket\|) dS \right\}$$

$$W^{eff} = (W^* + I_K)^*$$

\* = Transformation de Legendre

**K** = ensemble convexe set des tenseurs de contraintes admissibles

**I** = fonction indicatrice



Quid du comportement effectif si l'on prend en compte l'irréversibilité?

## Condition d'Irréversibilité

$$\cancel{\Phi([\dot{u}]_t)}$$

$\Phi$ (histoire de  $[[u]]$  jusqu'à l'instant  $t$ )

$\Phi(\delta_t)$  ← Variable interne



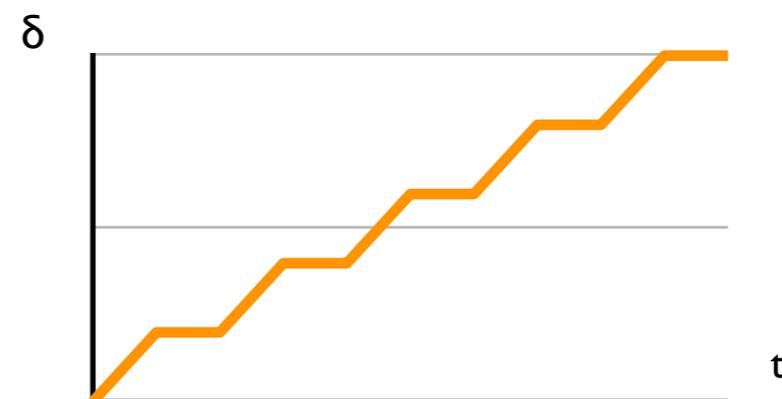
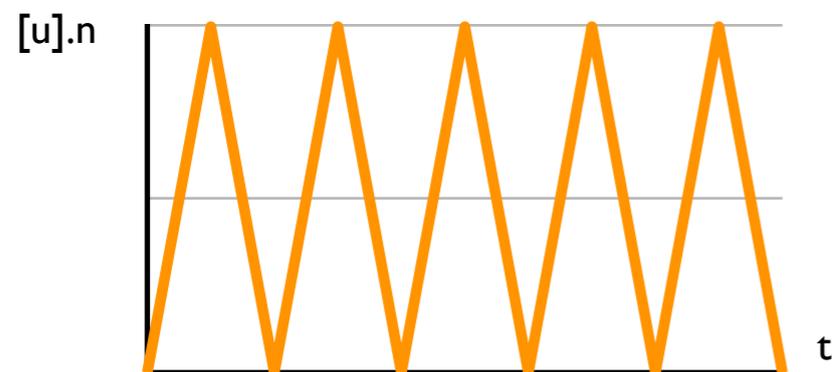
Modèle de Dugdale

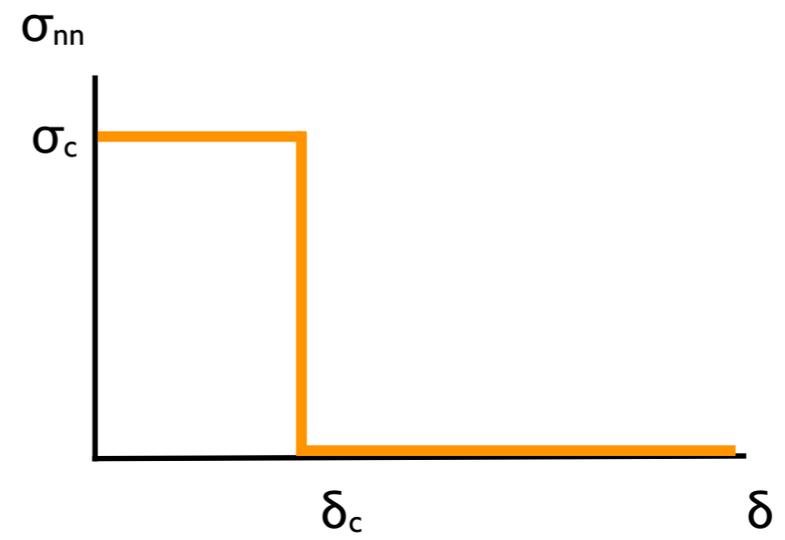
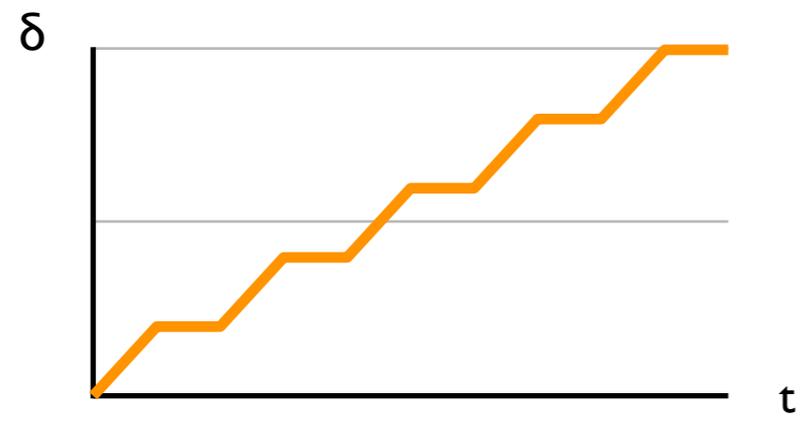
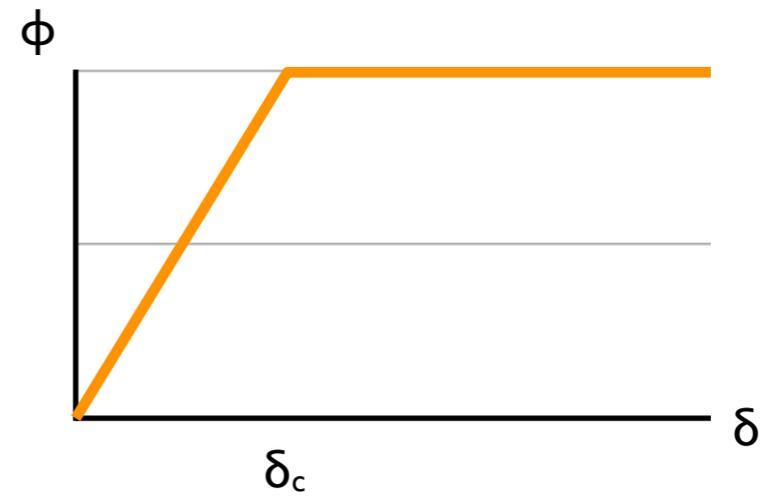
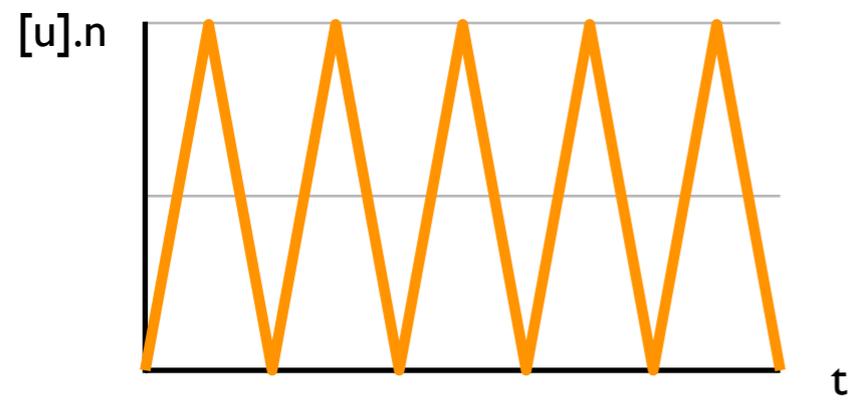
Exemples:

- Ouverture cumulée (mode I)
- Glissement cumulé (mode II ou III)

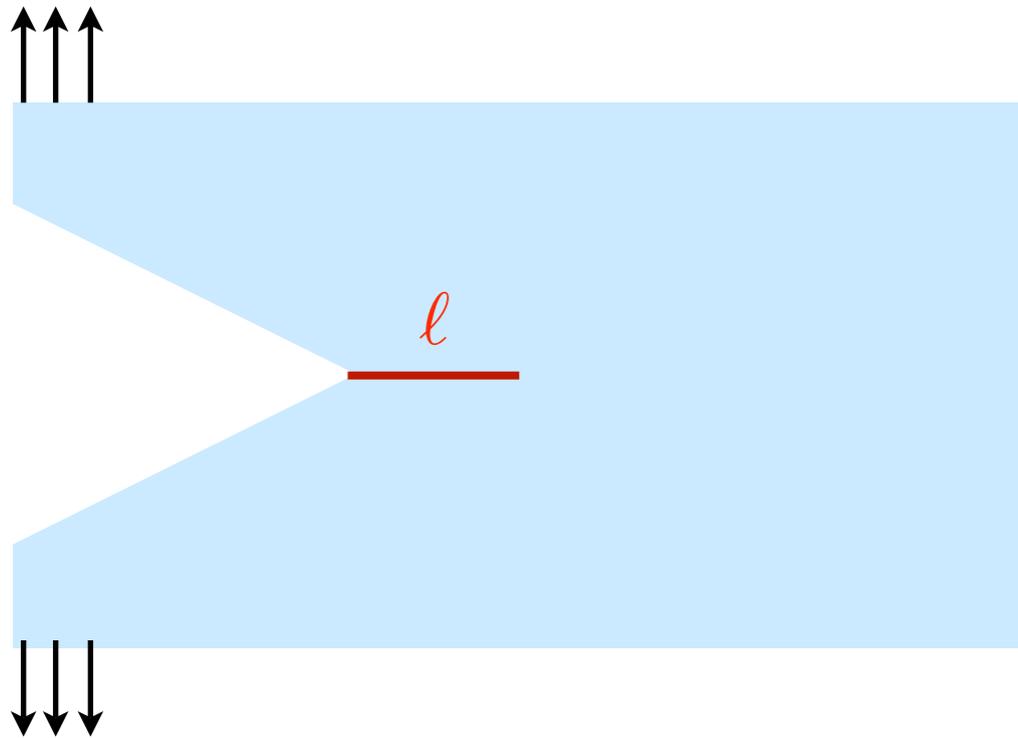
$$\dot{\delta} = ([\dot{u}] \cdot n)^+$$

$$\dot{\delta} = \| [\dot{u}] \cdot n - [[\dot{u}] \cdot n] n \|$$





## A grosse échelle

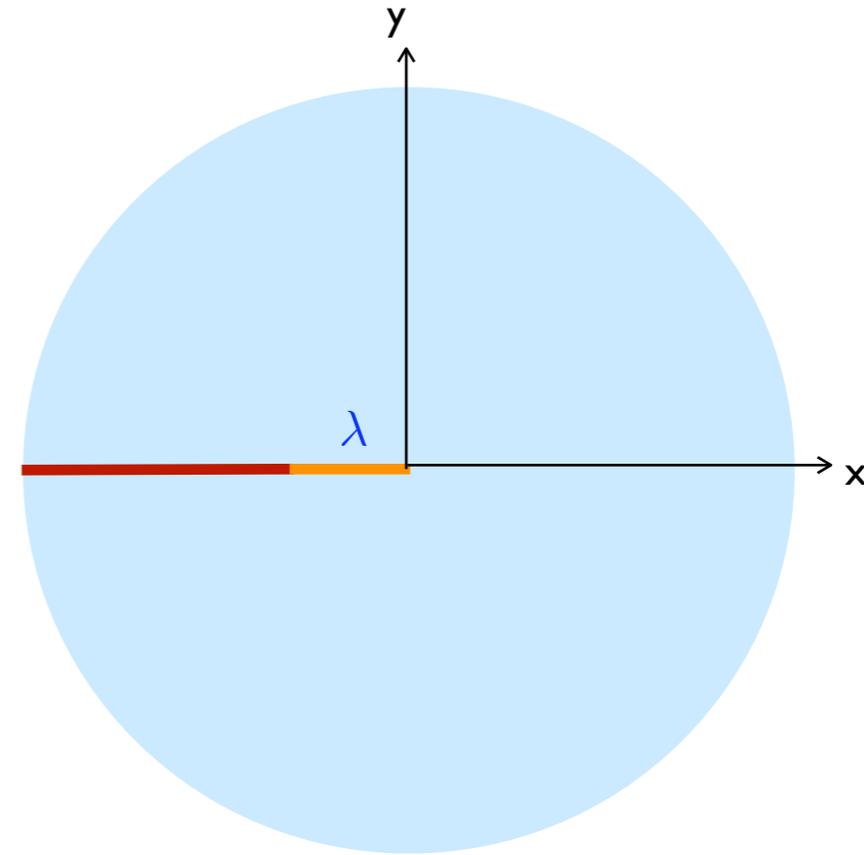


- Zone cohésive négligeable
- Singularité à la pointe
- L'énergie potentielle et le taux d'énergie potentielle sont, en première approximation, ceux correspondant à une fissure **non cohésive**

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{K_I}{2\mu} \mathbf{f}(\theta) + \text{regular part}$$

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2$$

## En fond de fissure



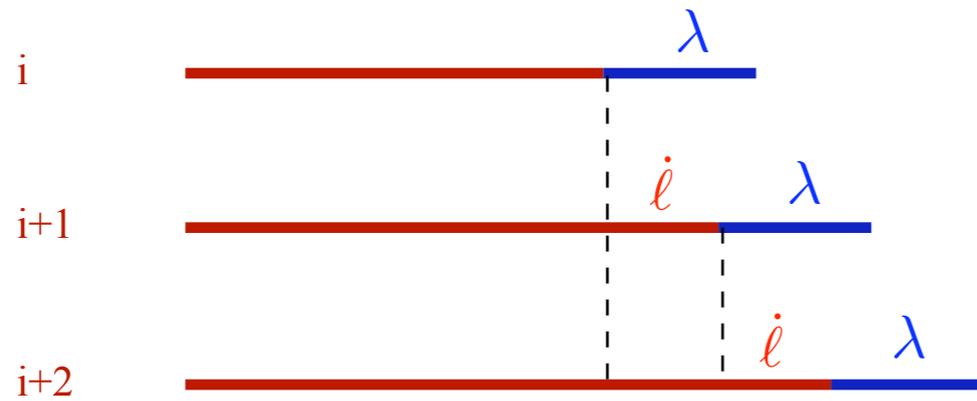
- Zone cohésive
- Pas de singularité à la pointe de la zone cohésive
- Comportement à l'infini donné par la singularité du problème à grosse échelle

$$\lambda = \frac{\pi}{8(1 - \nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} \frac{G}{G_c} \delta_c$$

$$[[v_2^0]](x) = V \left( 1 + \frac{x}{\lambda} \right) \frac{G}{G_c} \delta_c, \quad x \geq -\lambda$$

$$V(l) = \sqrt{1 - l} + l \ln(1 - \sqrt{1 - l}) - l \ln \sqrt{l}, \quad 0 < l \leq 1$$

### Evolution quasi-stationnaire



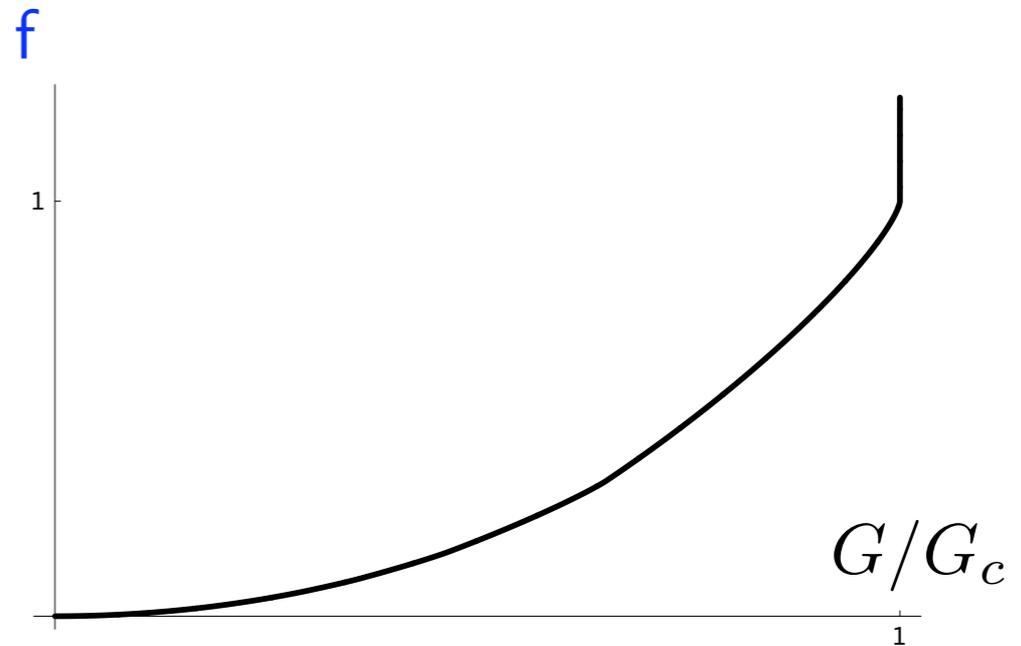
Ouverture cumulée égale à l'ouverture critique à la pointe **non cohésive**

$$\delta = \delta_c$$



### Loi de fatigue de type Paris

$$\dot{l} = \frac{\pi}{8(1 - \nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} f\left(\frac{G}{G_c}\right) \delta_c$$



$$\dot{l} \approx \frac{\pi}{24(1 - \nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} \left(\frac{G}{G_c}\right)^2 \delta_c$$

quand  $G/G_c$  est petit